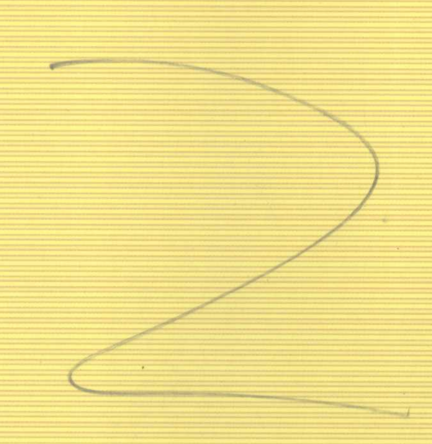
现代数学基础丛书 121

半群的S－系理论

（第二版）

刘仲奎　乔虎生　著



科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书介绍了半群 S-系理论的基础知识及最新研究成果. 全书共分 8 章. 其中第 1 章是必要的概念及准备, 第 2、3 两章分别讨论投射系和内射系, 第 4 ~ 6 章讨论和平坦性有关的问题, 第 7 章讨论正则系, 第 8 章讨论序 S-系. 本书在第一版的基础上修订再版, 增加了有关序 S-系、Rees 商系和弱形式的拉回平坦系等方向的部分研究成果.

本书力求简明扼要, 便于阅读, 可作为数学专业研究生的教材, 也可作为数学研究工作者的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

半群的 S-系理论/刘仲奎, 乔虎生著. —2 版. 北京: 科学出版社, 2008
(现代数学基础丛书 121)
ISBN 978-7-03-020370-0

Ⅰ. 半… Ⅱ. ①刘…②乔… Ⅲ. 半群-理论 Ⅳ. O152.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 031074 号

责任编辑: 林 鹏 张 扬/责任校对: 赵燕珍
责任印制: 赵德静/封面设计: 王 浩

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

丽 源 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1999 年 2 月第 一 版 开本: B5(720 × 1000)
2008 年 3 月第 二 版 印张: 21 1/2
2008 年 3 月第一次印刷 字数: 400 000
印数: 1—3 000

定价: 58.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈新欣〉)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用. 许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益.

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了十余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着. 1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会. 当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述. 据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷. 它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用.

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍. 既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出、简明扼要、注重创新.

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科. 我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域.

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动. 它获得了广大读者的喜爱. 我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高作出贡献.

杨　乐

2003 年 8 月

第二版前言

2000年以来,和数学的其他分支一样,半群的S -系理论在许多研究方向上得到了较快的发展. 因此,我们在讨论本书的修改时,首先考虑的问题是如何增添该领域最新的研究成果以反映该领域最新的研究动态. 我们认为,序S -系、Rees商系和弱形式的拉回平坦系等方向的发展现状既能较大程度地反应半群S -系理论的最新发展动态,又能反映我国学者的最新研究成果.因此,由乔虎生博士负责增加了有关序S -系、Rees商系和弱形式的拉回平坦系等方向的部分研究成果. 这些增加的内容主要表现在:增加了第8章,专门讨论有关序S -系的理论;增加了§5.10和§5.13两节,分别研究Rees商系和左可消幺半群的同调性质.同时在参考文献中增加了许多2000年以后发表的学术论文,以方便有兴趣的读者查阅.

另外,修改了第一版中某些不准确的表述和打印错误,增加了名词索引.结论的序号采用统一格式.例如,定理4.3.7表示第4章§4.3中的定理7. 我们力图通过我们的努力,使得读者可通过本书而接触半群S -系理论的最新成果.然而由于我们水平有限,书中一定有不少欠妥和不足之处，敬请读者不吝赐教.

作　者

2007.10.20

第一版序

与半格、半环、半模、半域诸理论之于格论、环论、模论、域论不同，半群理论以其特有的研究对象、研究课题和研究方法，早已独立于群论之外.至于在“Mathematical Reviews”的“Mathematics Subject Classification”里，半群的分类编号20M属于群的分类编号20，则是历史造成的习惯上的一种沿用.

在数学发展史上，“半群”的研究虽可追溯到1904年，但其系统的研究却始于20世经50年代初，可谓是比较年轻的代数学科. 但是，由于许多分析学科和许多代数学科对各类半群的广泛应用，以及计算机科学、非线性动力系统复杂性理论等数学外部学科对它的巨大推动，至今，它已形成为基础代数学的一个重要的分支学科.20世纪60年代由A.H.Clifford和G.B.Preston 合著的两卷《半群代数理论》已被确认为国际数学经典著作；70年代创刊并由德国Springer Verlag出版的Semigroup Forum 是半群理论的一个重要的国际性专门刊物；杂志Journal of Algebra 和Communications in Algebra 的编委里有著名半群专家T.E.Hall和J.M.Howie；许多数学家在世界各地开展半群(代数的、序的和拓扑的)理论的专门研究和各层次高级人才的培养(直至博士后)；近20年来，几乎每年都举办半群的国际会议.这一切充分说明这样一个事实：半群研究方兴未艾.

半群的S -系理论是半群代数理论的一个重要部分.该理论其思想部分地来自于群的群作用方法，部分地来自于环的模论方法.将半群的内部特征与由某种类型的S -系所构成的“外部环境”联系起来，形成了半群代数理论研究中的一个重要方法，而这一方法的深入开发自然又形成半群理论的一个重要课题.这个课题，由于大量系统的和深刻的研究成果的出现，已引起了越来越多的关注和研究. Renshaw从1986年到1991年利用S -系方法对半群的融合问题的出色工作，说明这一理论方法在半群代数理论中的应用领域已相当宽广.

国内从20世纪80年代后期就有我们自己培养的博士进入到这一有着良好发展态势与前景的领域进行研究工作.宋光天博士和刘仲奎博士在这一领域的研究中已获到了一批得到国际上该领域的权威人士认可和好评的研究成果.他们的工作已被国际同行大量引用，从而推动了国内关于该领域研究工作的进一步开展.

刘仲奎博士的专著《半群的S -系理论》一书重点介绍了他本人近年的研究工作及国际上这一领域的最新研究成果. 该书选题新颖，内容翔实，所述问题大多数是20世纪80年代后期及90年代该领域研究中的热点问题，是第一部关于半群S -系理论的专著.

作为一个半群与组合半群工作者,我很高兴能为该书作序.相信该书的出版将有利于推动这一领域的研究在国内的发展.

郭聿琦

1998.4.25

第一版前言

半群代数理论是20世纪五六十年代发展起来的一个崭新的代数学分支，它在自动机理论、计算机科学、组合数学、代数表示论、算子代数和概率论等方面都有广泛的应用，因此引起了越来越多的数学家的重视.对半群的研究方法大体上可分为两种:其一为从半群的内部构件如理想、同余以及特殊元素等出发研究半群的结构与特征；其二为从半群的外部环境如同余格、S -系范畴等出发研究半群的内部特征. 把半群作用在集合上，就得到S -系，不同的半群可得到不同的S -系.利用S -系的性质把握半群的特征，是本书的主要思想.

半群的S -系理论其思想部分来自于群的群作用方法，部分来自于环的模论方法.众所周知，当半群是群时，半群作用即为群作用，它的重要结论之一就是经典的Sylow定理.作为群作用轨道分解的推广，每个S -系可唯一地分解为不可分S -系的不交并.当半群作用在特殊的集合一Abel群上时，S-系事实上就是整数环上半群环的模.当S 是某个环的乘法半群时，S作用在Abel群上在满足必要的条件时即成为环上的模.半群作用的这几个层次的共同特点，就是将半群的“内部特征”和半群的由作用效果即S -系范畴所反映的“外部环境”联系起来，即半群具有什么样的“内部特征”当且仅当它具有什么样的作用效果.事实证明，这种方法可带来单纯的内部刻画方法无法获得的结果，正在国际上受到越来越多的重视.

著者及其一些同事从20世纪80年代后期在导师郭聿琦教授的指导下进入这一领域开展研究工作，获得了一批得到国际上这一领域的权威人士认可和好评的研究成果，并两次得到国家自然科学基金的资助.著者在多年的研究工作及研究生培养工作中，深感出版一本该领域专著的必要性.为了让国内数学界有更多的人投入到这一有着良好发展前景的课题研究中，同时也为了系统介绍我们自己的研究工作，特撰写本书.

本书是根据著者三年来开设的研究生课程《半群的S -系理论》的讲稿改写而成.全书共分7章. 第1章是必要的概念及准备，第2、3章分别讨论S -系的投射性与内射性，第4～ 6章讨论和平坦性相关的问题，第7章讨论S -系的正则性,第8章计论序S -系.虽然我们使用和环的模理论中相同的名词如投射性、内射性、平坦性等，但和环的模理论相比，半群的S -系理论内容更加丰富，问题更加困难.例如,对应于平坦模的概念，在S -系范畴中有平坦、强平坦、弱平坦、均衡平坦、条件(P)、条件(E)等互不相同的概念.本书除介绍S -系理论的基础知识以外，侧重于介绍著者本人的工作及国际上最新研究成果，使得读者可通过本书接触到前沿的工作.

由于时间仓促，我们十分遗憾这一领域中许多很有意义且十分优美的成果未能写入本书，例如，J.Renshaw关于半群融合理论的工作以及V.Gould关于S -系

的纯性的工作.不过有了本书所讲述的基础知识，读者阅读有关文献基本上不再有困难.

本书中我们尽量使用通用记号,如定理4.3.7表示第4章§4.3中的定理7.

受水平所限，书中不妥之处在所难免，敬请读者批评指正.

著者衷心感谢导师熊全淹教授和郭聿琦教授多年来的指导、帮助与鼓励，同时还要感谢香港中文大学的K.P.Shum教授、加拿大Wilfrid Laurier大学的S.Bulman-Fleming教授和德国Oldenburg大学的U.Knauer教授对我们工作的支持与鼓励，也感谢西北师范大学数学系的马勤生先生对本书所做的精致编排和大力支持，由于他们的大力协助才使本书得以尽早面世.

刘仲奎

1997.5.8

《现代数学基础丛书》编委会

本书的出版和所论课题的研究工作得到以下基金的资助：
国家自然科学基金(19501007、19671063、10171082)
教育部高校青年教师奖励基金、教育部高等学校骨干教师资助计划
甘肃省自然科学基金
甘肃省教育厅重点学科基金
西北师范大学重点学科基金、科技创新工程基金、皇台学术著作出版基金、甘肃省高等学校青年教师成才奖奖励科研基金

目　　录

第1章 基本概念

§1.1 S-系

设S是幺半群，1为其单位元，A是非空集合. 若有$S\times A$到A的映射$f: S\times A\to A$满足

$$f(t,f(s,a))=f(ts,a),\ \forall\ t,\ s\in S,\ \forall\ a\in A,$$

则称(A,f)是左S-系，或称S左作用于A上.为了方便起见，记$f(s,a)=sa$,于是上式变为

$$t(sa)=(ts)a,\ \forall\ t,\ s\in S,\ \forall\ a\in A.$$

此时，左S-系(A,f)简记为${}_SA$或A. 如果A还满足

$$1a=a,\ \forall\ a\in A,$$

则称A是单式左S-系. 以下除特殊声明以外，S-系均指单式左S-系.

同样的方法可以定义右S-系.

设A是S-系，B是A的非空子集合.若对任意$b\in B$,任意$s\in S$,都有$sb\in B$,则称B是A的子系,记为$B\leqslant A$.

显然$A\leqslant A$. 若S中含有零元0，则对于任意$a\in A$, $0a\leqslant A$.

下面的命题是不证自明的.

命题 1.1.1 S-系A的任意多个子系的交若非空，则仍为子系.

设M是S-系A的非空子集合，则A的包含M的最小子系是所有包含M的子系之交，称为由M生成的子系，记为$\langle M\rangle$，M称为子系$\langle M\rangle$的生成集. 显然有

$$\langle M\rangle=\{sm|s\in S,m\in M\}.$$

若记$Sm=\{sm|s\in S\}$, 则有

$$\langle M\rangle=\bigcup_{m\in M}Sm.$$

若$M=\{m_1,m_2,\cdots,m_n\}$为有限集合，则称$\langle M\rangle=Sm_1\cup\cdots\cup Sm_n$为有限生成子系. 特别地，由一个元素$m$生成的子系$Sm$称为循环子系.若$A$可由一个(有

限个)元素生成，则称A是循环(有限生成)系. 例如，对于任意$s \in S$, S的主左理想Ss即为S -系S的循环子系，特别地S为循环S -系.

设λ是S -系A上的等价关系，若λ满足：

$$(a, b) \in \lambda \Rightarrow (sa, sb) \in \lambda, \quad \forall\, s \in S, \quad \forall\, a, b \in A,$$

则称λ为A上的同余. 在A关于同余λ的商集A/λ上定义左S -作用

$$s(a\lambda) = (sa)\lambda, \quad \forall\, s \in S, \quad \forall\, a \in A,$$

则容易验证A/λ关于上述左S -作用构成一个S -系，称为A关于λ的商系.

设$B \leqslant A$，如下定义A上的关系：

$$a\lambda_B b \Leftrightarrow a = b \text{ 或 } a, b \in B.$$

容易验证λ_B是A上的同余，称其为由B决定的Rees同余，简称为Rees同余. 称商系A/λ_B为Rees商.

类似于子系的生成集概念，也可以考虑同余的生成集. 首先，下面的命题是明显的.

命题 1.1.2　S -系A上的任意多个同余的交仍为同余.

设H为$A \times A$的非空子集合，则A上的包含H的最小同余是所有包含H的同余之交，称为由H生成的同余，记为$\lambda(H)$. H称为同余$\lambda(H)$的生成集. 显然生成集是不唯一的.

命题 1.1.3　设H为$A \times A$的非空子集合，$a, b \in A$. 则$a\lambda(H)b$当且仅当$a = b$或者存在$t_1, t_2, \cdots, t_n \in S$,使得:

$$a = t_1c_1,\ t_1d_1 = t_2c_2, \cdots,\ t_{n-1}d_{n-1} = t_nc_n,\ t_nd_n = b,$$

其中$(c_i, d_i) \in H$或$(d_i, c_i) \in H$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

证明　在A上定义如下关系σ:

$$a\ \sigma\ b \Longleftrightarrow a = b \text{ 或者存在 } t_1, t_2, \cdots, t_n \in S, \text{ 使得：}$$
$$a = t_1c_1,\ t_1d_1 = t_2c_2, \cdots,\ t_{n-1}d_{n-1} = t_nc_n,\ t_nd_n = b,$$

其中$(c_i, d_i) \in H$或$(d_i, c_i) \in H$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

容易验证σ是A上的同余关系, 且$H \subseteq \sigma$. 设λ是A上的同余且$H \subseteq \lambda$,则对于任意$(a, b) \in \sigma$,有$a = b$, 或者

$$a = t_1c_1\lambda t_1d_1 = t_2c_2\lambda t_2d_2 = \cdots \lambda t_{n-1}d_{n-1} = t_nc_n\lambda t_nd_n = b.$$

所以$\sigma \subseteq \lambda$. 即σ是A上包含H的最小同余. 根据定义即$\sigma = \lambda(H)$. 结论得证. □

设A, B都是S-系.称映射$f : A \to B$为从A到B的S-同态，如果

$$f(sa) = sf(a), \ \forall\, s \in S, \quad \forall\, a \in A.$$

例如，设λ是A上的同余，令$B = A/\lambda$. 则自然的映射:

$$\begin{aligned}\lambda^\sharp : & A \to B \\ & a \mapsto a\lambda\end{aligned}$$

即为从A到B的S-同态.

从A到B的所有S-同态的集合记为$\mathrm{Hom}_S(A, B)$或简记为$\mathrm{Hom}(A, B)$.若S-同态$f : A \to B$还是单、满映射，则称f为同构.这时也说S-系A和B同构，记为$A \simeq B$.

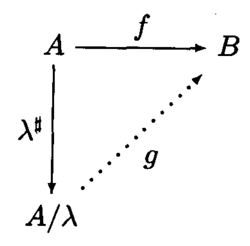
设$f : A \to B$是S-同态. 称集合

$$\{(a, a') \in A \times A | f(a) = f(a')\}$$

为f的核，记为$\mathrm{Ker}f$. 显然有

命题 1.1.4 任意S-同态$f : A \to B$的核$\mathrm{Ker}f$是A上的同余. S-满同态f为同构当且仅当$\mathrm{Ker}f$是A上的单位同余.

定理 1.1.5(同态基本定理) 设$f : A \to B$是S-同态, λ是A上的同余且$\lambda \subseteq \mathrm{Ker}f$. 则存在唯一同态$g : A/\lambda \to B$,使得下图可换:



若$\lambda = \mathrm{Ker}f$,则g是单同态. 若f还是满同态，则g也是满同态. 特别地,当f是满同态时有$A/\mathrm{Ker}f \simeq B$.

证明 若$(a, a') \in \lambda$，则$(a, a') \in \mathrm{Ker}\ f$,因此有$f(a) = f(a')$. 所以可以如下定义映射$g : A/\lambda \to B$:

$$g(a\lambda) = f(a), \quad \forall\, a \in A.$$

容易证明g还是S-同态，且使得上图可换.

设$g' : A/\lambda \to B$也满足$g'\lambda^\sharp = f$, 则对任意$a\lambda \in A/\lambda$, $g'(a\lambda) = g'\lambda^\sharp(a) = f(a) = g\lambda^\sharp(a) = g(a\lambda)$, 所以$g' = g$.

设$\lambda =$Ker$f$, 则$g(a\lambda) = g(a'\lambda) \Rightarrow f(a) = f(a') \Rightarrow (a,a') \in$Ker$f$=$\lambda \Rightarrow a\lambda = a'\lambda$. 即$g$是单同态.

若f是满同态，则显然g也是满同态.从已证的结果立即可得$A/\text{Ker}f \simeq B$. □

推论 1.1.6　设λ, σ是A上的同余且$\lambda \subseteq \sigma$. 则有S -系的同构式

$$A/\lambda\Big/\sigma/\lambda \simeq A/\sigma,$$

其中$\sigma/\lambda = \{(a\lambda, b\lambda) \mid (a,b) \in \sigma\}$.

证明　定义S -同态$f : A/\lambda \to A/\sigma$为$f(a\lambda) = a\sigma$.则Ker$f = \sigma/\lambda$.由定理1.1.5即得结论. □

设S, T都是幺半群，若A既是左S-系，又是右T-系，且对任意$a \in A$,任意$s \in S$，任意$t \in T$，有

$$(sa)t = s(at),$$

则称A是左S -右T-系，记为${}_SA_T$.例如,S是左S -右S -系. 若A是左S -系，H是A的自同态幺半群，则A是左S -右H- 系(约定$f \in H$作用在$a \in A$上的结果为$(a)f$).

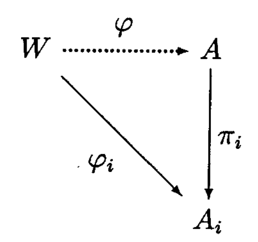
§1.2　直积　余直积

所有左S -系以及左S -系之间的S -同态构成一个范畴，称为左S -系范畴，记为S -Act.同样，所有右S -系以及右S -系之间的S - 同态构成一个范畴，称为右S -系范畴, 记为Act-S.本节考虑范畴S -Act中的直积和余直积. 先从一般的定义开始.

设$\mathbb{C}$是范畴，$\{A_i|i \in I\}$是$\mathbb{C}$中的一簇对象. $\mathbb{C}$中的对象A叫做$\{A_i|i \in I\}$的直积，如果:

(1) 对任意$i \in I$，存在态射$\pi_i : A \to A_i$;

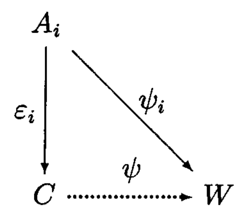
(2) 对任意对象$W \in \mathbb{C}$，若存在态射$\varphi_i : W \to A_i$，$i \in I$,则存在唯一态射$\varphi : W \to A$,使得下图可换:



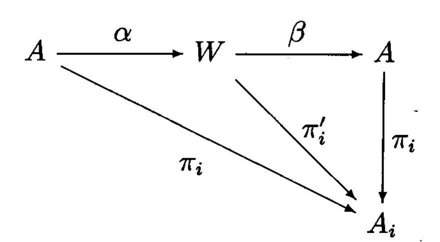
对偶地可定义余直积.$\mathbb{C}$中的对象$\mathbb{C}$叫做$\{A_i|i\in I\}$的余直积，如果:

(1) 对任意$i\in I$，存在态射$\varepsilon_i:A_i\to C$;

(2) 对任意对象$W\in\mathbb{C}$，若存在态射$\psi_i:A_i\to W$，$i\in I$，则存在唯一态射$\psi:C\to W$使得下图可换:



对于给定的一簇对象$\{A_i|i\in I\}$,容易证明其直积和余直积若存在,则必是唯一的(在同构的意义下). 例如,设A和A'都是$\{A_i|i\in I\}$的直积，则存在态射$\pi_i:A\to A_i$和$\pi_i':A'\to A_i,i\in I$.因此存在态射$\alpha:A\to A'$和$\beta:A'\to A$使得下图可换:



所以对任意$i\in I,\pi_i\beta\alpha=\pi_i$. 显然$\pi_i 1_A=\pi_i$. 所以由唯一性即知$\beta\alpha=1_A$. 同理可知$\alpha\beta=1_{A'}$. 所以$A\simeq A'$. 同样的方法可以证明余直积在同构的意义下也是唯一的.

所以记$\{A_i|i\in I\}$的直积和余直积分别为$\prod\limits_{i\in I}A_i$和$\coprod\limits_{i\in I}A_i$.

在S -系范畴S -Act中，直积和余直积具有非常简单的表达: 它们分别是卡氏积和不交并.

设$\{A_i|i\in I\}$是一簇S -系. 作A_i的卡氏积$B=\{(a_i)_{i\in I}|a_i\in A_i\}$. 按分量规定$S$在$B$上的左作用，即任意$s\in S$，任意$b=(a_i)_{i\in I}$,规定$sb=(sa_i)_{i\in I}$. 则$B$是左$S$ -系. 对任意$i\in I$,规定S -同态$\pi_i:B\to A_i$为

$$\pi_i((a_i)_{i\in I})=a_i.$$

若W是S -系，且对任意$i\in I$,有S -同态$\varphi_i:W\to A_i$,则可规定映射$\varphi:W\to B$为:

$$\varphi(w)=(\varphi_i(w))_{i\in I},\quad \forall\, w\in W.$$

显然φ是S -同态，并且$\pi_i\varphi(w) = \pi_i(\varphi_i(w))_{i\in I} = \varphi_i(w)$，所以$\pi_i\varphi = \varphi_i$. 若还有$S$ -同态$\varphi' : W \to B$也满足$\pi_i\varphi' = \varphi_i$,则对任意$i \in I, \pi_i\varphi'(w) = \pi_i\varphi(w)$，所以$\varphi'(w) = \varphi(w), \forall\ w \in W$. 所以$\varphi = \varphi'$.这即证明了$\varphi$的唯一性. 因此由定义即知$B$为$\{A_i|i \in I\}$的直积. 即有

命题 1.2.1　在S -系范畴S -Act中，任意一簇S -系的直积同构于它们的卡氏积.

下面考虑S -系$\{A_i|i \in I\}$的余直积. 作不交并$\dot{\bigcup}_{i\in I} A_i$. 设$s \in S$.对任意$b \in B$,存在唯一的$i$,使得$b \in A_i$. 所以可按照$S$在$A_i$上的左作用来定义$sb$.因此$B$可作成一个$S$ -系. 对于任意$i \in I$, 显然有自然的包含同态$\varepsilon_i : A_i \to B$.设$W$是$S$ -系且存在S -同态$\psi_i : A_i \to W,\ i \in I$.如下定义映射$\psi : B \to W$:

$$\psi(b) = \psi_i(b), \quad \forall\ b \in B,$$

其中i满足$b \in A_i$(由B的构造可知对于给定的b,满足$b \in A_i$的i是唯一的).显然ψ是S -同态.对任意$i \in I$,任意$a_i \in A_i, \psi\varepsilon_i(a_i) = \psi(a_i) = \psi_i(a_i)$,所以有$\psi\varepsilon_i = \psi_i$. 设还有 S -同态$\psi' : B \to W$ 也满足 $\psi'\varepsilon_i = \psi_i$. 则对任意 $i \in I$, 任意$a_i \in A_i, \psi\varepsilon_i(a_i) = \psi'\varepsilon_i(a_i)$，所以$\psi\varepsilon = \psi'\varepsilon_i$，从而$\psi = \psi'$. 这就证明了 ψ的唯一性. 由定义即知B为$\{A_i|i \in I\}$的余直积. 总结以上结论，有

命题 1.2.2　在S -系范畴S -Act中，任意一簇S -系的余直积同构于它们的不交并.

设幺半群S中含有零元.此时任意S -系A中必有元素θ满足:

$$s\theta = \theta, \quad \forall\ s \in S.$$

当然这种元素θ也许不唯一. 称S -系A是中心的，如果A中存在一个固定元素θ满足

$$s\theta = \theta, 0a = \theta, \quad \forall\ s \in S, \quad \forall\ a \in A.$$

显然这样的元素θ是唯一的. 称θ为A的零元，记为θ_A.

设A, B都是中心S -系，$f : A \to B$是S -同态,则显然有$f(\theta_A) = f(0\theta_A) = 0f(\theta_A) = \theta_B$,即$f$把$A$的零元变为$B$的零元.又若$C \leqslant A$，则$\theta_C = \theta_A$.

所有中心S -系以及S -系之间的S -同态构成一个范畴，记之为S^0-Act，它是S -Act的全子范畴.下面在范畴S^0-Act中考虑余直积.

设$\{A_i|i \in I\}$是中心S -系. 令

$$B = \{\theta\} \cup \big(\dot{\bigcup_{i\in I}} (A_i - \{\theta_{A_i}\})\big).$$

如下规定S在B上的左作用：任意$s\in S$,任意$b\in B$,若$b=\theta$, 则规定$sb=\theta$;若$b\in A_i-\{\theta_{A_i}\}$,则规定

$$sb=\begin{cases}\theta, & 若\ sb=\theta_{A_i},\\ 按原来的定义, & 否则.\end{cases}$$

容易验证B是一个S-系，且是中心的，其零元为θ.称B是$\{A_i|i\in I\}$的零直并，记为$\bigcup\limits_{i\in I}{}^{0}A_i$. 简单地说，零直并$B$即为$A_i(i\in I)$的并，但$A_i$和$A_j(j\neq i)$中的非零元都是$B$中的不同元，而把$A_i(i\in I)$中的零元都看成同一个元$\theta$.

命题 1.2.3 在范畴S^0-Act中，任意一簇S-系的直积和余直积分别同构于它们的卡氏积和零直并.

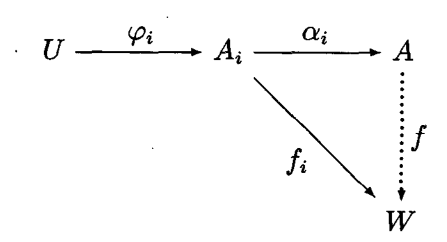
证明 仿命题1.2.1和1.2.2的证明. □

下面考虑零直并概念的推广.为此先考虑如下的泛问题：

设$\{A_i|i\in I\}$和U都是S-系，$\varphi_i:U\to A_i$是S-单同态. S-系A和S-同态$\alpha_i:A_i\to A(i\in I)$称为$(A_i,\varphi_i)$的融合余积，如果:

(1) 对任意$i,j\in I,\alpha_i\varphi_i=\alpha_j\varphi_j$;

(2) 对任意S-系W和S-同态$\{f_i\in\mathrm{Hom}_S(A_i,W)|f_i\varphi_i=f_j\varphi_j,\ \forall\ i,j\in I\}$,存在唯一的$S$-同态$f:A\to W$,使得对任意$i\in I$,下图可换:



容易证明，融合余积在同构的意义下是唯一的.

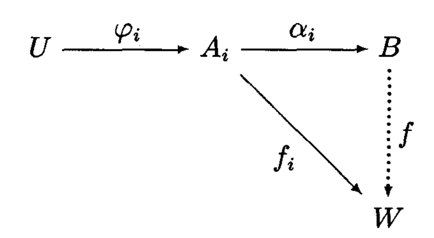
命题 1.2.4 融合余积是存在的.

证明 继续使用上述定义中的记号. 令

$$B=U\mathbin{\dot\cup}\Big(\dot{\bigcup_{i\in I}}(A_i-\mathrm{Im}\varphi_i)\Big),$$

对任意$s\in S$, $x\in A_i-\mathrm{Im}\varphi_i$,若$sx\in\mathrm{Im}\varphi_i$, 则$sx=\varphi_i(u),u\in U$. 此时规定$s\cdot x=u$. 其他情形按自然方式定义,于是$B$成为$S$-系. 规定$\alpha_i:A_i\to B$如下：若$a_i\in A_i-\mathrm{Im}\varphi_i$, 则$\alpha_i(a_i)=a_i$; 若$a_i\in\mathrm{Im}\varphi_i$,则存在唯一的$u\in U$,使得$\varphi_i(u)=a_i$,此时规定$\alpha_i(a_i)=u$.容易证明$\alpha_i$是$S$-同态，且对任意$i,j\in I$有$\alpha_i\varphi_i=\alpha_j\varphi_j$.设有$S$-系$W$及$S$-同态$f_i:A_i\to W$,满足$f_i\varphi_i=f_j\varphi_j(\forall\ i,j\in I)$.如下定义映射$f:B\to W$:若$x\in U$,则规定$f(x)=f_i\varphi_i(x)$;若$x\in A_i-\mathrm{Im}\ \varphi_i$, 则规

定$f(x) = f_i(x), i \in I$.显然f是S -同态，且对任意$i \in I$,有如下的交换图：



设$f' : B \to W$也满足上述交换图，则对任意$x \in B$,若$x \in U$,则$\varphi_i(x) \in A_i$,所以$f(x) = f\alpha_i(\varphi_i(x)) = f_i(\varphi_i(x)) = f'\alpha_i(\varphi_i(x)) = f'(x)$; 若$x \in A_i - \mathrm{Im}\varphi_i$,则$f(x) = f\alpha_i(x) = f_i(x) = f'\alpha_i(x) = f'(x)$.因此满足上述交换图的$f$是唯一的.这就证明了融合余积的存在性. □

设I是幺半群S的左理想,且$I \neq S, x, y, z$是三个符号,令

$$(S, x) = \{(s, x) | s \in S\},$$
$$(S, y) = \{(s, y) | s \in S\},$$
$$(I, z) = \{(s, z) | s \in I\}.$$

按自然的方式可定义S在$(S, x), (S, y), (I, z)$上的左作用. 令

$$\varphi_x : (I, z) \to (S, x),\ (s, z) \mapsto (s, x);$$
$$\varphi_y : (I, z) \to (S, y),\ (s, z) \mapsto (s, y).$$

则φ_x, φ_y为S -单同态.记$A(I)$为$((S, x), (S, y), \varphi_x, \varphi_y)$的融合余积，则由命题1.2.4知

$$A(I) = (I, z) \dot\cup \{(s, x) | s \in S - I\} \dot\cup \{(s, y) | s \in S - I\}.$$

S在$A(I)$上的左作用为:

$$s(t, z) = (st, z),$$

$$s(t, x) = \begin{cases} (st, x), & 若\ st \in S - I, \\ (st, z), & 若\ st \in I, \end{cases}$$

$$s(t, x) = \begin{cases} (st, x), & 若\ st \in S - I, \\ (st, z), & 若\ st \in I. \end{cases}$$

显然$(S, x) \simeq S(1, x), (S, y) \simeq S(1, y)$,所以$A(I) = S(1, x) \cup S(1, y)$,且$S(1, x) \cap S(1, y) = \{(s, z) | s \in I\} = (I, z)$.

S -系$A(I)$以后要经常用到.

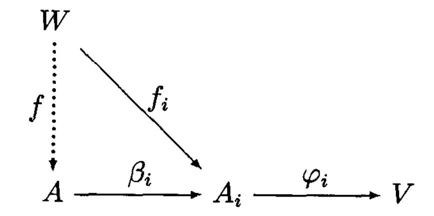
设S是含零幺半群，$\{A_i|i \in I\}$是一簇中心左S-系，令$U = \{0\}, \varphi_i : U \to A_i$为$\varphi_i(0) = \theta_{A_i}$,则$(A_i, \varphi_i)$的融合余积为$B = \{0\} \ \dot{\cup} \ \left(\dot{\bigcup}_{i\in I} (A_i - \{\theta_{A_i}\})\right)$，即为$\{A_i|i \in I\}$的零直并，所以融合余积概念是零直并的推广.

显然当$U = \emptyset$时，融合余积即为通常的余积(命题1.2.2)，所以融合余积概念也是余积的推广.

设$\{A_i|i \in I\}$和V都是S-系，$\varphi_i : A_i \to V$是S-满同态. S-系A和S-同态$\beta_i : A \to A_i (i \in I)$称为$(A_i, \varphi_i)$的余融合积，如果：

(1) 对任意$i, j \in I, \varphi_i\beta_i = \varphi_j\beta_j$;

(2) 对任意S-系W和S-同态$\{f_i \in \mathrm{Hom}_S(W, A_i)|\varphi_i f_i = \varphi_j f_j, \forall 1, j \in I\}$,存在唯一的$S$-同态$f : W \to A$,使得对任意$i \in I$,下图可换：



显然，余融合积在同构的意义下是唯一的.

命题 1.2.5 设A_i, φ_i, V同上，令

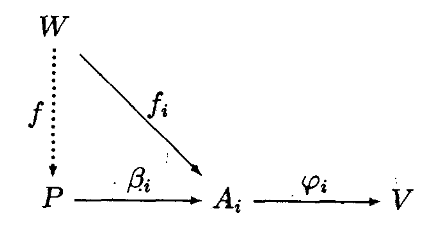
$$P = \left\{(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i | \varphi_i(a_i) = \varphi_j(a_j), \ \forall \ i, j \in I\right\},$$

则P按自然的方式构成S-系.记$\beta_i : P \to A_i (i \in I)$是自然的投射,则$P$和$\beta_i (i \in I)$是$(A_i, \varphi_i)$的余融合积.

证明 显然对任意$i, j \in I$有$\varphi_i\beta_i = \varphi_j\beta_j$. 设$W$是$S$-系,$f_i : W \to A_i$满足对任意$i, j \in I$有$\varphi_i f_i = \varphi_j f_j$,定义$f : W \to P$为

$$f(x) = (f_i(x))_{i\in I}, \quad \forall \ x \in W.$$

容易证明f是S-同态，且使得下图交换：



易证f也是唯一的. □

记(A_i,φ_i)的余融合积为$\prod_{i\in I}{}_V A_i$.则显然有$\prod_{i\in I}{}_V A_i \leqslant \prod_{i\in I} A_i$. 若$V$是单元$S$ -系，则$\prod_{i\in I}{}_V A_i$即为$\prod_{i\in I} A_i$.

记$P_i:\prod_{i\in I} A_i \to A_i$为自然的投射$(i\in I)$. 子系$A\leqslant \prod_{i\in I} A_i$称为$\{A_i|i\in I\}$的次直积,如果对所有$i\in I$都有$P_i(A)=A_i$.

命题 1.2.6　余融合积是次直积.

证明　设$A=\prod_{i\in I}{}_V A_i$是余融合积. 因为φ_i是满同态，所以对任意$a_j\in A_j$,存在$a_i\in A_i$使得$\varphi_i(a_i)=\varphi_j(a_j)(i\in I)$.因此$A_j=P_j(\prod_{i\in I}{}_V A_i)$.　□

§1.3　不可分S -系

定义 1.3.1　S -系A叫做可分的，如果存在A的非空子系A_1 和A_2，使得$A=A_1\dot\cup A_2$.否则就称A是不可分的.

命题 1.3.2　任意循环S -系是不可分的.

证明　设$A=Sx$是循环S -系.若$A=A_1\dot\cup A_2$，则$x\in A_1$或$x\in A_2$,因此$A=A_1$或$A=A_2$.所以A是不可分的.　□

命题 1.3.3　设$\{A_i|i\in I\}$是S -系A的一簇不可分子系. 若$\bigcap_{i\in I} A_i\neq\varnothing$, 则$\bigcup_{i\in I} A_i$仍是$A$的不可分子系.

证明　设$\bigcup_{i\in I} A_i=M\dot\cup N$. 再设$x\in\bigcap_{i\in I} A_i$, 则$x\in M\dot\cup N$.不妨假定$x\in M$,则对任意$i\in I, x\in M\cap A_i$. 显然有$A_i=(M\cap A_i)\dot\cup(N\cap A_i)$. 所以由$A_i$的不可分性即知$N\cap A_i=\varnothing$. 由$i$的任意性即知$N=\varnothing$.　□

由命题1.3.2知任意循环系是不可分的.下述命题说明,不可分S -系不一定是循环的.

命题 1.3.4　任意不可分S -系是循环的当且仅当S是群.

证明　设S是群，A是不可分S -系.任取$a\in A$.若$A-Sa=\varnothing$,则$A=Sa$,即A是循环的.下设$A-Sa\neq\varnothing$. 因为$A=Sa\dot\cup(A-Sa)$,所以由A的不可分性即知$A-Sa$不是子系. 因此存在$b\in A-Sa$和$t\in S$使得$tb\in Sa$. 所以$b=t^{-1}tb\in t^{-1}Sa\subseteq Sa$.这和$b\in A-Sa$矛盾.

设L是S的真左理想.考虑§1.2中构造的S -系$A(L)$.显然$A(L)=S(1,x)\cup S(1,y)$,且$S(1,x)\cap S(1,y)\neq\varnothing$.所以由命题1.3.2和1.3.3即知$A(L)$是不可分的.但是$A(L)$不是循环的,从而得到矛盾. 矛盾说明$S$没有真的左理想，因此$S$是群.　□

下面的定理是本节的主要结果.

定理 1.3.5　任意S -系A可唯一地分解成不可分S -子系的不交并.

证明 任取$x \in A$,则Sx是不可分的. 令

$$\mathscr{D}_x = \{B \mid B \text{ 是}A\text{的不可分子系且 } x \in B\}.$$

因为$Sx \in \mathscr{D}_x$, 所以$\mathscr{D}_x \neq \emptyset$. 显然$\bigcap\limits_{B\in\mathscr{D}_x} B \neq \emptyset$. 所以由命题1.3.3知$A_x = \bigcup\limits_{B\in\mathscr{D}_x} B$是不可分的.显然$A_x$是包含$x$ 的最大的不可分子系. 设$x, y \in A$. 如果$A_x \cap A_y \neq \emptyset$,则由命题1.3.3知$A_x \cap A_y$也是不可分的. 又$x, y \in A_x \cup A_y$,所以由$A_x, A_y$的最大性即知$A_x = A_x \cup A_y = A_y$.如下定义$A$上的关系$\sim$:

$$x \sim y \Leftrightarrow A_x = A_y,$$

则$\sim$是A上的等价关系.在每个等价类中取代表元x,则$\dot{\bigcup\limits_{x\in A'}} A_x$,这里$A'$是如上所取的代表元的集合.

下证唯一性. 设A有两种不交并分解: $A = \dot{\bigcup\limits_{i\in I}} B_i = \dot{\bigcup\limits_{j\in J}} C_j$,这里$B_i$和$C_j$都是不可分的.对任意$i \in I$,考虑$B_i$中的元素. 取定$b \in B_i$,则存在$j \in J$,使得$b \in C_j$.所以$Sb \subseteq C_j$. 令

$$\begin{aligned} B_i' &= \{b \in B_i | b \in C_j\}, \\ B_i'' &= \{b \in B_i | \text{ 存在 } k \in J, \text{使得 } b \in C_k \text{ 但 } k \neq j\}. \end{aligned}$$

显然$B_i = B_i' \cup B_i''$且B_i'和B_i''若不空的话都是S-系.由B_i的不可分性即得$B_i'' = \emptyset$.所以对任意$x \in I$, 存在$j \in J$, 使得$B_i \subseteq C_j$. 对于上述j, 同样的方法可知存在$i' \in I$, 使得$C_j \subseteq B_{i'}$.所以$B_i \subseteq C_j \subseteq B_{i'}$.易知$i = i'$. 因此$B_i = C_j$.同样的方法可知对任意$j \in J$,存在$i \in I$使得$C_j = B_i$.这即证明了唯一性. □

设A是S-系, $A = \dot{\bigcup\limits_{i\in I}} B_i$是$A$的不可分分解.并称每个$B_i$为$A$的不可分分量.

命题 1.3.6 设A是S-系, $a, b \in A$.则a, b在A的同一个不可分分量中当且仅当存在$s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$, $a_1, \cdots, a_{n-1} \in A$, 使得:

$$\begin{aligned} s_1 a &= t_1 a_1, \\ s_2 a_1 &= t_2 a_2, \\ s_3 a_2 &= t_3 a_3, \\ &\cdots\cdots \\ s_n a_{n-1} &= t_n b. \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

证明 充分性 设存在$s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S, a_1, \cdots, a_{n-1} \in A$满足题设条件.容易看出$a$和$b$在同一个不可分分量中.

必要性 在A上定义关系$\sim$:

$$a \sim b \Leftrightarrow \text{存在} s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S, a_1, \cdots, a_{n-1} \in A,$$

使得等式组(1.3.1)成立.

可以证明$\sim$是A上的等价关系. 将A按照等价关系$\sim$分类，则A可以写成这些子类的不交并.设A_i是任意子类，$x \in A_i$.对任意$s \in S$,显然$x \sim sx$,即sx和x在同一个子类中，所以$sx \in A_i$.这说明A_i是S -系.容易证明A_i还是不可分的.所以A写成了不可分子系的不交并，且任意$a, b \in A$,若a, b在同一个不可分分量中，则$a \sim b$,故结论成立. □

推论 1.3.7　设A是S -系，$a, b \in A$.则a, b在A的同一个不可分分量中当且仅当存在$s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$, $a_1, \cdots, a_n \in A$,使得

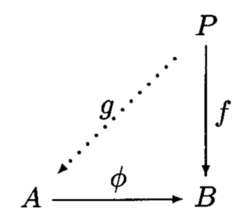
$$\begin{aligned} a &= s_1 a_1 \\ t_1 a_1 &= s_2 a_2, \\ t_2 a_2 &= s_3 a_3, \\ &\cdots\cdots \\ t_n a_n &= b. \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

证明　若等式组(1.3.1)成立，则在式(1.3.1)的前后分别增加等式$a = 1 \cdot a$和$1 \cdot b = b$即可得到形如式(1.3.2)的等式组. □

第2章 投 射 性

§2.1 投射S-系

定义 2.1.1 称S-系P为投射的，如果对于任意S-满同态$\phi : A \longrightarrow B$,任意$S$-同态$f : P \longrightarrow B$, 存在$S$-同态$g : P \longrightarrow A$使得下图可换.



若P是投射S-系，有时我们也说P是范畴S-Act中的投射对象.

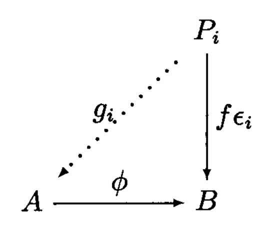
例 2.1.2 设S是幺半群，$e^2 = e \in S$. 则S-系Se是投射的.

证明 设$\phi : A \longrightarrow B$是任意$S$-满同态,$f : Se \longrightarrow B$是任意$S$-同态.记$f(e) = b \in B$.因为$\phi$是满的，所以存在$a \in A$使得$\phi(a) = b$.定义$S$-同态$g : Se \longrightarrow A$为：$g(se) = sea, \forall s \in S$. 则对任意$s \in S$,$\phi g(se) = \phi(sea) = se\phi(a) = seb = sef(e) = f(see) = f(se)$,所以$\phi g = f$.这就证明了$Se$是投射的. □

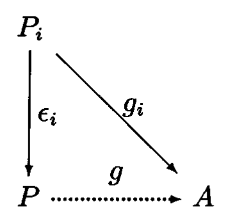
为了给出投射S-系的等价刻画，我们需要以下引理.

引理 2.1.3 任意投射S-系的余直积仍为投射系.

证明 设$P_i(i \in I)$是投射S-系, $P = \coprod_{i \in I} P_i$, $\phi : A \longrightarrow B$是$S$-满同态, $f : P \longrightarrow B$是S-同态.记$\epsilon_i : P_i \rightarrow P$是自然的$S$-同态，则由$P_i$的投射性知存在$S$-同态$g_i : P_i \longrightarrow A$使得下图可换：



由余直积的泛性质知存在S -同态$g : P \longrightarrow A$使得下图可换：



所以对任意$i \in I, f\epsilon_i = \phi g_i = \phi g \epsilon_i$. 因此$f = \phi g$, 即$P$是投射的. □

称S -满同态$f{:}A \longrightarrow B$是可收缩的,如果存在S -同态$g{:}B \longrightarrow A$使得$fg = 1_B$.下面的定理给出了投射系的等价刻画.

定理 2.1.4 对于S -系P, 以下三条等价：

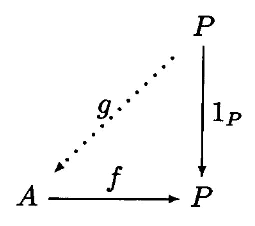
(1) P是投射的;

(2) 函子$\mathrm{Hom}_S(P,-)$(从范畴S -Act到集合范畴)把满同态变为满映射;

(3) 任意满同态$A \longrightarrow P$是可收缩的.

证明 (1)$\Longleftrightarrow$(2) 是显然的.

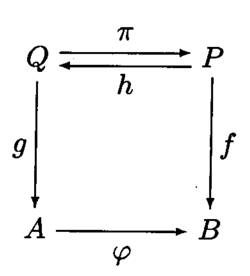
(1)$\Longrightarrow$(3) 对任意满同态$f{:}A \longrightarrow P$,由P的投射性知存在S -同态$g{:}P \longrightarrow A$使得下图可换：



所以f是可收缩的.

(3)$\Longrightarrow$(1) 对任意$x \in P$,令$S_x = S$. 作$S_x(x \in P)$ 的余直积$Q = \coprod_{x \in P} S_x$. 由引理2.1.3 和例2.1.2知$Q$是投射$S$ -系.对任意$x \in P$,作S -同态$\pi_x : S_x \longrightarrow P$为$\pi_x(s) = sx, \forall s \in S_x$. 由余直积的泛性质即知存在$S$ -同态$\pi : Q \longrightarrow P$使得$\pi|_{S_x} = \pi_x$. 显然$\pi$还是满同态.所以由(3)知$\pi$是可收缩的, 即存在$S$ -同态$h : P \longrightarrow Q$使得$\pi h = 1_P$.

设$\phi: A \longrightarrow B$是$S$-满同态，$f: P \longrightarrow B$是$S$-同态. 由$Q$的投射性即知存在$S$-同态$g: Q \longrightarrow A$使得下图可换：



即$\phi g = f\pi$.所以$f = f\pi h = \phi gh$. 这就证明了P是投射系. □

下面的定理说明引理2.1.3的逆也成立.

定理 2.1.5 设$P_i (i \in I)$是S-系. 则$\coprod_{i\in I} P_i$为投射系当且仅当每个P_i为投射系.

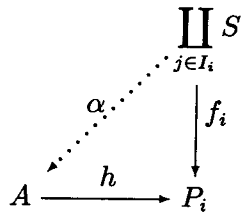
证明 若每个P_i为投射系，则由引理2.1.3知$\coprod_{i\in I} P_i$ 为投射系.

反过来，设$P = \coprod_{i\in I} P_i$是投射系. 记$\epsilon_i : P_i \longrightarrow P$为自然的包含同态(实际上，$P = \dot{\cup}_{i\in I} P_i$). 对于每个$P_i$,类似于定理2.1.4的证明中的(3)⟹(1),即知存在集合I_i以及S-满同态$f_i : \coprod_{j\in I_i} S \longrightarrow P_i$. 作余直积$T = \coprod_{i\in I}(\coprod_{j\in I_i} S)$，记$\sigma_i : \coprod_{j\in I_i} S \longrightarrow T$为自然的包含同态. 由余直积的泛性质即知存在$S$-同态$f: T \longrightarrow P$使得对任意$i \in I$ 有$f\sigma_i = \epsilon_i f_i$. 由于每个$f_i$是满同态，所以易证$f$也是满同态.利用$P$的投射性,由定理2.1.4 知$f: T \longrightarrow P$是可收缩的.所以存在$S$-同态$g: P \longrightarrow T$使得$fg = 1_P$.我们下面证明$g\epsilon_i(P_i) \subseteq \coprod_{j\in I_i} S$.

若存在$x \in P_i$，使得$g\epsilon_i(x) \in \coprod_{j\in I_k} S$，$k \neq i$. 则有$x = \epsilon_i(x) = fg\epsilon_i(x) \in f(\coprod_{j\in I_k} S) = f_k\sigma_k(\coprod_{j\in I_k} S) = \epsilon_k f_k(\coprod_{j\in I_k} S) \subseteq P_k$，矛盾. 这就证明了$g\epsilon_i(P_i) \subseteq \coprod_{j\in I_i} S$.

因此对于任意$x \in P_i$，$fg\epsilon_i(x) = f(g\epsilon_i(x)) = f\sigma_i(g\epsilon_i(x)) = \epsilon_i f_i g\epsilon_i(x)$，即$\epsilon_i(x) = \epsilon_i f_i g\epsilon_i(x)$.由于$\epsilon_i$是单同态，我们有$x = f_i g\epsilon_i(x)$.所以$f_i g\epsilon_i = 1_{P_i}$.

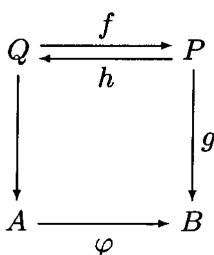
设$h: A \longrightarrow P_i$是S-满同态.由例2.1.2和引理2.1.3知$\coprod_{j\in I_i} S$是投射系.所以存在S-同态$\alpha: \coprod_{j\in I_i} S \longrightarrow A$使得下图可换：



即$h\alpha = f_i$.所以$h\alpha g\epsilon_i = f_i g\epsilon_i = 1_{P_i}$.因此$S$-满同态$h: A \longrightarrow P_i$是可收缩的.由定理2.1.4即知$P_i$是投射的. □

命题 2.1.6 设S-满同态$f: Q \longrightarrow P$是可收缩的.如果Q是投射系,那么P也是投射系.

证明 对于任意S-满同态$\phi: A \longrightarrow B$和$S$-同态$g: P \longrightarrow B$, 由以下的交换图即得结论.



□

由第1章我们已经知道,循环系是不可分的,不可分系未必是循环的.但对于投射系我们有

命题 2.1.7 设P是投射S-系.则P是不可分的当且仅当它是循环的.

证明 和定理2.1.4 的证明类似地可知存在S-满同态$f: \coprod_{i\in I} S_i \longrightarrow P$,这里每个$S_i$同构于${}_SS$.由于$P$是投射的,所以$f$是可收缩的,即存在$S$-同态$g: P \longrightarrow \coprod_{i\in I} S_i$使得$fg = 1_P$.显然存在$i \in I$,使得$g(P) \cap S_i \neq \varnothing$. 令

$$A_1 = \{x \in P | g(x) \in S_i\}, \quad A_2 = P - A_1.$$

若$A_2 \neq \varnothing$, 则A_1, A_2都是S-系且$P = A_1 \dot{\cup} A_2$.这和P的不可分性矛盾.所以$A_2 = \varnothing$, 即$g(P) \subseteq S_i$. 因此$P = fg(P) \subseteq f(S_i)$. 而$f(S_i) \subseteq P$是显然的.所以$P = f(S_i)$,故$P$是循环的. □

命题 2.1.8 循环S-系Sx是投射的当且仅当存在S的幂等元e 使得$Sx \simeq Se$.

证明 由例2.1.2知对于任意幂等元$e \in S$, Se是投射S-系. 反过来, 设Sx是投射系.定义S-同态$f: S \longrightarrow Sx$为$f(s) = sx, \forall\ s \in S$.则$f$是可收缩的, 所以存在$S$-同态$g: Sx \longrightarrow S$使得$fg = 1_{Sx}$.设$g(x) = e \in S$. 则

$$x = fg(x) = f(e) = ef(1) = ex,$$

所以

$$e = g(x) = g(ex) = eg(x) = ee = e^2,$$

即e是幂等元.显然$g(Sx) = Se$. 所以$Sx \simeq Se$. □

下面的定理给出了投射S-系的结构.

定理 2.1.9 S-系P是投射的当且仅当存在S的幂等元$e_i, i \in I$, 使得$P \simeq \coprod_{i\in I} Se_i$.

证明 由例2.1.2 和引理2.1.3 即知$\coprod_{i\in I}Se_i$ 是投射S -系. 反过来, 设P是投射的.由定理1.3.5知P有不可分分解$P=\dot{\cup}_{i\in I}P_i=\coprod_{i\in I}P_i$, 其中每个$P_i$是不可分系.由定理2.1.5知每个$P_i$也是投射的.所以由命题2.1.7即知$P_i$是循环的.由命题2.1.8知存在幂等元$e_i\in S$使得$P_i\simeq Se_i$.故$P\simeq\coprod_{i\in I}Se_i$. □

最后我们再给出一个定义.

定义 2.1.10 S -系A称为是自由的,如果$A\simeq\coprod_{i\in I}{}_SS$.

显然自由系是投射的,但投射系不一定是自由的.例如,若S中有零元且$|S|\geqslant 2$, 则$S0$是投射系但不是自由系.

设A是自由系,则有S -同构$f:A\simeq\coprod_{i\in I}S_i$. 我们把$\{f^{-1}(1_i)|1_i$是$S_i$的单位元,$i\in I\}$ 叫做A的自由基.显然$A=\coprod_{i\in I}Sf^{-1}(1_i)$,且$Sf^{-1}(1_i)\simeq S$.

由定理2.1.4的证明即知有

命题 2.1.11 任意S -系A都是自由系的同态像,即存在自由系F以及F上的同余λ使得$A\simeq F/\lambda$.

§2.2 完全左投射幺半群

定义 2.2.1 称S为完全左投射幺半群,如果所有(左)S -系是投射的.

定理 2.2.2 S是完全左投射幺半群当且仅当$S=\{1\}$.

证明 设$S=\{1\}$, P是任意S -系,$f:A\longrightarrow P$是任意S -满同态. 如下定义映射$g:P\longrightarrow A$:任意$x\in P$,取$a\in A$使得$f(a)=x$, 规定$g(x)=a$. 因为$S=\{1\}$,所以g是S -同态. 又$fg=1_P$,所以f是可收缩的. 由定理2.1.4即知P是投射系. 所以S是完全左投射幺半群.

反过来,设S是完全左投射幺半群.设L是S的真左理想.考虑§1.2中构造的S -系$A(L)$. 因为$A(L)$是投射的,又是不可分的,所以由命题2.1.7知$A(L)$是循环的.这和$A(L)$的构造矛盾.所以S没有真的左理想,即S是群.

考虑一元S -系$M=\{\theta\}$.显然有S -满同态$f:S\longrightarrow M:f(s)=\theta,s\in S$.因为$M$是投射的,所以$f$ 是可收缩的,即存在S -同态$g:M\longrightarrow S$使得$fg=1_M$. 令$g(\theta)=a\in S$,则对任意$s\in S$,

$$sa=sg(\theta)=g(s\theta)=g(\theta)=a.$$

所以a是S的右零元.但S又是群, 所以$S=\{1\}$. □

下面考虑所有循环系是投射系的幺半群.为此先证明

引理 2.2.3 设λ是S上的左同余.则循环S -系S/λ是投射的当且仅当存在$t\in S$使得$t\lambda 1$,且对任意$x,y\in S,x\lambda y\Longrightarrow xt=yt$.

证明　设S/λ是投射系，则S满同态$\sigma: S \longrightarrow S/\lambda$是可收缩的，所以存在$S$-同态$g: S/\lambda \longrightarrow S$使得$\sigma g = 1$. 设$g([1]) = t$,这里$[1]$表示1所在的类,下同. 因为$[1] = \sigma g([1]) = \sigma(t) = [t]$,所以$t\lambda 1$.设$x, y \in S$使得$x\lambda y$, 则$[x] = [y]$,所以$xt = xg([1]) = g([x]) = g([y]) = yg([1]) = yt$.

反过来,设满足条件的t存在.定义映射$f: S/\lambda \longrightarrow S$为$f([s]) = st, \forall\ s \in S$.若$[x] = [y]$, 则$x\lambda y$,所以$xt = yt$. 这说明$f$的定义是可行的. 显然$f$是$S$-同态. 记$\sigma: S \longrightarrow S/\lambda$是自然的$S$-满同态, 则

$$\sigma f([x]) = \sigma(xt) = x\sigma(t) = x[t] = x[1] = [x], \quad \forall x \in S.$$

所以$\sigma f = 1$, 即σ是可收缩的. 由命题2.1.6即知S/λ是投射的. □

定理 2.2.4　设幺半群S含有$0(\neq 1)$. 则所有循环的中心S-系是投射的当且仅当$S = \{1, 0\}$.

证明　设$S = \{1, 0\}$, λ是S上的左同余.如果$(1, 0) \notin \lambda$,则$S/\lambda \simeq S$是投射的. 所以下设$(1, 0) \in \lambda$. 在引理2.2.3中令$t = 0$,立即可知S/λ是投射的.

反过来, 设所有循环的中心S-系是投射的. 假定L是S的左理想. 则中心S-系S/λ_L是投射的.所以由引理2.2.3即知存在$t \in S$使得$t\lambda_L 1$, 且对任意$x, y \in S, x\lambda_L y \Longrightarrow xt = yt$. 若$1 \in L$, 则$L = S$. 若$1 \notin L$,则$t = 1$.因此若$x, y \in L$,则$x = y$.这说明$|L| = 1$,故$L = \{0\}$.因此$S$除了$\{0\}$以外再没有真左理想.

设$0 \neq a \in S$, 则$Sa \neq \{0\}$, 所以$Sa = S$. 因此,a是左可逆元.容易证明$S - \{0\}$是群.

令$G = S - \{0\}$.设$M = \{x, \theta\}$,规定S在M上的左作用为:

$$gx = x,\ 0x = \theta,\ g\theta = \theta = 0\theta, \quad \forall\ g \in G.$$

则M是中心S-系, 且$M = Sx$,所以M是循环的. 从而M是投射S-系. 如下定义S-同态$\pi: S \longrightarrow M$:

$$\pi(g) = x,\ \pi(0) = \theta, \quad \forall\ g \in G.$$

显然π是S-满同态.所以π是可收缩的,即存在S-同态$f: M \longrightarrow S$使得$\pi f = 1_M$.设$f(x) = s \in S$. 若$s \in G$,则对任意$g \in G$,

$$gs = gf(x) = f(gx) = f(x) = s.$$

因为G是群,所以$g = 1$.因此$|G| = 1$,从而$S = \{1, 0\}$.若$s \notin G$, 则$s = 0$. 所以$x = \pi f(x) = \pi(s) = \pi(0) = \theta$,矛盾. □

定理 2.2.5　对于幺半群S, 以下两条等价:

(1) 所有循环S-系是投射的;

(2) $S = \{1\}$或$S = \{1, 0\}$.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 设 $S \neq \{1\}$. 考虑一元 S -系 $M = \{\theta\}$. 显然有S -满同态$f : S \longrightarrow M$.由M的投射性知f是可收缩的, 所以存在S -同态$g : M \longrightarrow S$使得$fg = 1_M$.记$g(\theta) = a \in S$.则对任意$s \in S$, $sa = sg(\theta) = g(s\theta) = g(\theta) = a$,即$a$是$S$的右零元.

设N为S的所有右零元的集合,则N是S的左理想.由条件即知Rees 商S/λ_N是投射的. 所以由引理2.2.3知存在$t \in S$使得$t\lambda_N 1$,且任意$x, y \in S$, $x\lambda_N y \Longrightarrow xt = yt$.若$1 \in N$,则$S = \{1\}$,矛盾.所以$1 \notin N$.因此$t = 1$.若$x, y \in N$,则$x\lambda_N y$,所以$x = y$.这说明$|N| = 1$,即$S$有唯一的右零元$\theta$. 对任意$s, t \in S$,因为$t(\theta s) = (t\theta)s = \theta s$,所以$\theta s$也是右零元,从而$\theta s = \theta$.这说明$\theta$是$S$的零元.

这样我们就证明了如果$S \neq \{1\}$,那么S中含有零元$\theta \neq 1$.所以由定理2.2.4即知$S = \{1, 0\}$.

(2)$\Longrightarrow$(1) 由定理2.2.2和定理2.2.4的证明即得结论. □

§2.3 拟投射系

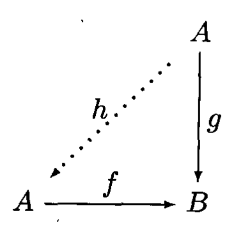
本节中我们假定幺半群S含有零元$0 \neq 1$,且考虑的S -系均为S^0-Act中的对象,即均为中心S -系.

和§2.1中投射S -系的定义类似地可在S^0-Act中定义投射对象.本节中所说的投射S -系均指范畴S^0-Act 中的投射对象. 考察引理2.2.3和定理2.2.4的证明，我们有

命题 2.3.1 所有循环的中心S -系是投射的当且仅当$S = \{1, 0\}$.

下面给出拟投射S -系的概念.

定义 2.3.2 设 $A \in S^0$-Act. 称 A 是拟投射的, 如果对任意 S -满同态 $f : A \longrightarrow B$和任意S -同态$g : A \longrightarrow B$,存在S -同态$h : A \longrightarrow A$使得下图可换:



根据我们的约定,上述定义中的A, B均在S^0-Act中.

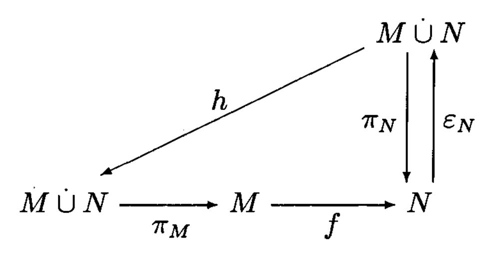
显然投射S -系是拟投射的.反之则不然.例如,设S是交换幺半群且$|S| \geqslant 3$.则由命题2.3.1 知存在循环S -系A, 使得A不是投射的.但由下面的命题,A是拟投射的.

命题 2.3.3 设S是交换幺半群. 则任意循环S -系是拟投射的.

证明 设$A = Sx$, $f : A \longrightarrow B$是S -满同态, $g : A \longrightarrow B$是S -同态.记$g(x) = b \in B$.由于f是满同态,所以存在$a \in A$使得$f(a) = b$.定义$h : A \longrightarrow A$为$h(sx) = sa$,$s \in S$.设$a = s_0x$.若$sx = tx$, $s, t \in S$,则$s_0sx = s_0tx$,所以$ss_0x = ts_0x$,即$sa = ta$.这说明h的定义是可行的.显然h是S -同态.又$fh(sx) = f(sa) = sf(a) = sb = sg(x) = g(sx)$,所以$fh = g$.因此$A$是拟投射的. □

引理 2.3.4 设$f : M \longrightarrow N$是S -满同态.若$M \coprod N$是拟投射的, 则f是可收缩的.

证明 由下图即得结论.



□

定理 2.3.5 对于幺半群S,以下三条等价:

(1) 所有S -系都是拟投射的;

(2) 所有S -系都是投射的;

(3) $S = \{1, 0\}$.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2)设A是任意S -系.由命题2.1.11知存在自由S -系F以及S -满同态$f : F \longrightarrow A$.由(1)知$F \coprod A$是拟投射的,所以由引理2.3.4知f是可收缩的.因此A是投射的.

(2)$\Longrightarrow$(3) 由命题2.3.1即得.

(3)$\Longrightarrow$(1) 设A是任意S -系,$f : A \longrightarrow B$是任意S -满同态,$g : A \longrightarrow B$是任意S -同态.对任意$0 \neq a \in A$,$g(a) \in B$,所以存在$b \in A$使得$f(b) = g(a)$.定义$h : A \longrightarrow A$为$h(a) = b$ (满足$f(b) = g(a)$的b不唯一,但我们任意取定一个).若$a = 0 \in A$,则规定$h(0) = 0$.容易证明h是S -同态且$fh = g$.所以A是拟投射的. □

定理 2.3.6 设S是交换幺半群,则以下儿条等价:

(1) 任意拟投射系是投射的;

(2) 任意拟投射系的余直积是投射的;

(3) 任意拟投射系的余直积是拟投射的;

(4) $S = \{1, 0\}$.

证明 (1)$\Longrightarrow$(4) 由命题2.3.3知任意循环S -系都是拟投射的,所以由(1)知所有循环S -系都是投射的.由命题2.3.1即得$S = \{0, 1\}$.

(4)$\Longrightarrow$(3) 由定理2.3.5即得.

(3)$\Longrightarrow$(2) 设$\{P_i|i \in I\}$是一簇拟投射S -系, $P = \coprod_{i\in I} P_i$. 由命题2.1.11知存在自由S -系F以及S -满同态$f : F \longrightarrow P$.显然$P \coprod F = \coprod_{i\in I} P_i \coprod F$仍是拟投射$S$ -系的余直积,所以由(3)知$P \coprod F$ 是拟投射的.再由引理2.3.4知f是可收缩的,所以P是投射的.

(2)$\Longrightarrow$(1) 设A是拟投射S -系.由命题2.1.11知存在自由S -系F及S -满同态$f : F \longrightarrow A$.由(2)知$A \coprod F$是投射的,所以由引理2.3.4知f是可收缩的,从而A是投射的. □

由定理2.3.5知当$S = \{0, 1\}$时,S^0-Act 中的所有对象都是投射对象.由定理2.2.2知此时S -Act 中有非投射的对象.下面的例子说明当$S = \{0, 1\}$时,S^0-Act 中存在对象M,使得M是S^0-Act 中的投射对象,但M不是S -Act中的投射对象.

例 2.3.7 设$S = \{1, 0\}, M = \{\theta, a, b\}$.对任意$x \in M$,规定$1x = x, 0x = \theta$.则$M$是$S$ -系, θ为其零元.由定理2.3.5知M是S^0-Act中的投射对象.假定M也是S -Act中的投射对象.

令$S_1 = S, S_2 = S$.在S -Act中作S_1和S_2的余直积$S_1 \coprod S_2$,如下定义映射$f : S_1 \coprod S_2 \longrightarrow M$:

$$f(1_1) = a, \quad f(1_2) = b, \quad f(0_1) = f(0_2) = \theta.$$

则f是S -满同态.所以f是可收缩的,即存在S -同态$g : M \longrightarrow S_1 \coprod S_2$使得$fg = 1_M$.因为$0a = 0b$, 所以$0g(a) = 0g(b)$.不妨设$0g(a) = 0g(b) \in S_1$,则$g(a), g(b) \in S_1$.所以$b = fg(b) = f(g(b)) = f(g(b)1_1) = g(b)f(1_1) = g(b)a \in \{\theta, a\}$,矛盾.因此$M$不是$S$ -Act中的投射对象.事实上,$S_1 \coprod S_2 \notin S^0$-Act. 在$S^0$-Act中$S_1$和$S_2$的余直积应该是它们的零直并.

§2.4 投射系的直积

由§2.1知任意一簇投射S -系的余直积仍是投射系.本节讨论投射系的直积.主要结果选自Bulman-Fleming 的文章[20]. 首先我们有

命题 2.4.1 对任意集合I,以下两条等价:

(1) $S^I = \prod_I S$是投射的;

(2) 若$A_i, i \in I$是投射S -系,则$\prod_{i\in I} A_i$仍为投射系.

证明 (2)$\Longrightarrow$(1)是显然的.

(1)$\Longrightarrow$(2).设S^I,$A_i, i \in I$都是投射S -系. 对任意$i \in I$,由定理2.1.9知存在集合J_i及幂等元$e_{ij} \in S (j \in J_i)$使得$A_i \simeq \coprod_{j\in J_i} Se_{ij}$.因此

$$\prod_{i\in I} A_i \simeq \prod_{i\in I} \coprod_{j\in J_i} Se_{ij} = \coprod_{\phi\in J} (\prod_{i\in I} Se_{i\phi(i)}),$$

这里$J = \cup_{i\in I}J_i$. 因为S -满同态$f_i: S \longrightarrow Se_{i\phi(i)}$是可收缩的,所以诱导同态$f: S^I \longrightarrow \prod_{i\in I} Se_{i\phi(i)}$也是可收缩的,因此对任意$\phi \in J$, $\prod_{i\in I} Se_{i\phi(i)}$ 是投射的,从而由定理2.1.5知$\prod_{i\in I} A_i$ 是投射的. □

命题 2.4.2 对任意集合I,以下两条等价:

(1)S^I是自由的;

(2) 若$A_i(i \in I)$,是自由S -系,则$\prod_{i\in I} A_i$仍为自由系.

证明 由自由系的定义即知任意一簇自由系的余直积仍为自由系,所以类似于命题2.4.1的证明即可完成该命题的证明. □

设$s, t \in S$.我们称s是t的因子,如果$t \in sS$.记为$s|t$.显然$s\mathscr{R}t \iff s|t$且$t|s$. 设X是S的非空子集合.元素$d \in S$称为X的公因子,如果对任意$x \in X$, d是x的因子. d称为X的最大公因子,如果d是X的公因子,且X的任意公因子都是d的因子.最大公因子不一定存在.若存在,则任意两个最大公因子具有$\mathscr{R}$-关系.

设$a = (a_i)_{i\in I} \in S^I$.若集合$\{a_i|i \in I\}$的最大公因子存在,我们任意取定一个,记为$g(a)$.若$d$是$\{a_i|i \in I\}$ 的另外的最大公因子,则$d\mathscr{R}g(a)$.设$a_i = g(a)a'_i$, $i \in I$.令$a' = (a'_i)_{i\in I} \in S^I$,则$a = g(a)a'$.显然,如果$S$是左可消幺半群,则对于任意$a \in S^I$和如上取定的$g(a)$, 满足$a = g(a)a'$的$a' \in S^I$是唯一的.

引理 2.4.3 设S是左可消幺半群且S的任意非空子集合都有最大公因子. 继续使用上述记号,则$\{a'_i|i \in I\}$的最大公因子一定是S中的可逆元.

证明 设h是$\{a'_i|i \in I\}$ 的一个最大公因子.则$g(a)h$是$\{a_i|i \in I\}$ 的最大公因子. 所以$g(a)\mathscr{R}g(a)h$.因为S是左可消幺半群,所以存在S的可逆元u使得$g(a)h = g(a)u$.因此$h = u$. □

引理 2.4.4 在引理2.4.3 的条件和记号之下,对任意$s \in S$,有$g(sa)\mathscr{R}sg(a)$.

证明 因为$sa = (sa_i)_{i\in I}$,所以$sg(a)$是$\{sa_i|i \in I\}$的公因子. 因为$g(sa)$是$\{sa_i|i \in I\}$的最大公因子, 所以存在$h \in S$, 使得$g(sa) = sg(a)h$. 设$sa = g(sa)a''$, 则$sa = sg(a)ha''$. 又$sa = sg(a)a'$,所以$a' = ha''$.因此h是$\{a'_i|i \in I\}$的公因子.由引理2.4.3即知h是S中的可逆元. 所以$g(sa)\mathscr{R}sg(a)$. □

命题 2.4.5 在引理2.4.3的条件和记号之下,S^I的包含元素$a = g(a)a'$的不可分分量为Sa'.

证明 设$b \in S^I$, b和a在同一个不可分分量中.由推论1.3.7 知存在$s_1, t_1, \cdots$, $s_n, t_n \in S$, $b_1, \cdots, b_n \in S^I$,使得:

$$
\begin{aligned}
b &= s_1 b_1, \\
t_1 b_1 &= s_2 b_2, \\
t_2 b_2 &= s_3 b_3, \\
&\cdots\cdots \\
t_n b_n &= a.
\end{aligned}
$$

再设$b = g(b)b'$. 我们下面对n用数学归纳法证明存在S的可逆元u使得$b' = ua'$.于是$b = g(b)ua' \in Sa'$.

设$n = 1$, 则$b = s_1 b_1$, $t_1 b_1 = a$. 由引理2.4.4知存在可逆元$u, v \in S$, 使得

$$
\begin{aligned}
g(b) = g(s_1 b_1) = s_1 g(b_1) u, \\
g(a) = g(t_1 b_1) = t_1 g(b_1) v.
\end{aligned}
$$

设$b_1 = g(b_1)b_1'$. 则$g(b)b' = b = s_1 b_1 = s_1 g(b_1) b_1' = g(b) u^{-1} b_1'$, 所以$b' = u^{-1} b_1'$. 同理$g(a)a' = a = t_1 b_1 = t_1 g(b_1) b_1' = g(a) v^{-1} b_1'$,所以$a' = v^{-1} b_1'$. 因此$b' = u^{-1} v a'$.

设 $n > 1$.和前面证明类似地有 $b_1' = ub'$. 对于 $t_1 b_1 \in S^I$, 设 $t_1 b_1 = g(t_1 b_1)(t_1 b_1)'$.由归纳假定知存在$S$的可逆元$x$使得$(t_1 b_1)' = xa'$. 所以

$$t_1 g(b_1) b_1' = t_1 b_1 = g(t_1 b_1)(t_1 b_1)' = t_1 g(b_1) y x a',$$

这里$y \in S$是可逆元.因此$b_1' = yxa'$.由此即得$b' = u^{-1} b_1' = u^{-1} y x a'$. □

设$a = (a_i)_{i \in I} \in S^I$.定义如下记号:

$$
\begin{aligned}
R(a) &= \{b = (b_i)_{i \in I} \in S^I | a_i b_i = a_j b_j, \forall\, i, j \in I\}, \\
r(a) &= \{s \in S | a_i s = a_j s, \forall\, i, j \in I\}.
\end{aligned}
$$

对任意$x, y \in S$, 定义

$$r(x, y) = \{s \in S | xs = ys\}.$$

定理 2.4.6 对幺半群S, 以下几条等价:

(1) 任意投射S -系的直积仍为投射系;

(2) 对任意非空集合I, S^I是投射系;

(3) 对任意非空集合I和任意$a=(a_i)_{i\in I}\in S^I$，$R(a)$和$r(a)$或为空集，或为循环右S -系;

(4) S是左可消的, S的任意主右理想的交若非空的话,则仍是主右理想, 且对任意$x,y\in S$, $r(x,y)$或为空集,或为S的主右理想;

(5) S是左可消的, S的任意非空子集合有最大公因子,对任意$x,y\in S$, $r(x,y)$或为空集, 或为S的主右理想.

证明 (1)$\Longleftrightarrow$(2) 这是命题2.4.1.

(2)$\Longrightarrow$(3) 设$a=(a_i)_{i\in I}\in S^I$.假定$R(a)\neq\varnothing$.则$R(a)$是右S -系S^I的子系.设$R(a)=\{b^j|j\in J\}$,这里$b^j=(b_i^j)_{i\in I}\in S^I$,$j\in J$.考虑$(b_i^j)_{j\in J},(b_k^j)_{j\in J}\in S^J$.显然有

$$(b_i^j)_{j\in J}=1\cdot(b_i^j)_{j\in J},$$
$$a_i(b_i^j)_{j\in J}=a_k(b_k^j)_{j\in J},$$
$$1\cdot(b_k^j)_{j\in J}=(b_k^j)_{j\in J},$$

所以$(b_i^j)_{j\in J}$和$(b_k^j)_{j\in J}$在S^J的同一个不可分分量中. 因为S^J是投射S -系, 所以由命题2.1.8 知S^J的每个不可分分量具有形式Sc,其中$c\in S^J$满足如下条件：存在幂等元$e\in S$使得$ec=c$ 且对任意$x,y\in S,xc=yc\Longrightarrow xe=ye$.所以可设$(b_i^j)_{j\in J}=u_ic\in Sc$, $\forall i\in I$. 对任意$i,k\in I$,因为

$$a_iu_ic=a_i(b_i^j)_{j\in J}=a_k(b_k^j)_{j\in J}=a_ku_kc,$$

所以由c的性质即知有

$$a_iu_ie=a_ku_ke,\quad\forall\, i,k\in I.$$

这说明S^I中的元素$(u_ie)_{i\in I}\in R(a)$,所以$(u_ie)_{i\in I}S\subseteq R(a)$.

设$b^j\in R(a)$,则$b^j=(b_i^j)_{i\in I}=(u_ic_j)_{i\in I}$,这里$c=(c_j)_{j\in J}\in S^J$. 由$c$的性质即得$b^j=(u_iec_j)_{i\in I}=(u_ie)_{i\in I}c_j\in(u_ie)_{i\in I}S$.所以$R(a)=(u_ie)_{i\in I}S$ 是循环的.

下设 $r(a)\neq\varnothing$. 则 $r(a)$是S的右理想. 设 $r(a)=\{s^j|j\in J\}$. 考虑 S^J中的元素 $(s^j)_{j\in J}$. 因为 S^J是投射的, 所以存在 $c=(c_j)_{j\in J}\in S^J$和幂等元$e\in S$使得$ec=c$且对任意$x,y\in S,xc=yc\Longrightarrow xe=ye$, 而$(s^j)_{j\in J}\in Sc$.设$(s^j)_{j\in J}=uc$, 则对任意$i,k\in I$, $a_iuc=a_i(s^j)_{j\in J}=a_k(s^j)_{j\in J}=a_kuc$,所以$a_iue=a_kue$.因此$ue\in r(a)$.设$s\in r(a)$,则$s=s^j$.因此$s=uc_j=uec_j\in ueS$.所以$r(a)=ueS$是$S$的循环右理想.

(3)$\Longrightarrow$(4) 设$x,s,t\in S$满足$xs=xt$且$s\neq t$.取集合$I=S$,设$a=(x)_{i\in I}\in S^I$,令$A=\{s,t\}^S=\coprod_{i\in S}\{s,t\}$.则$A$中的任意元素都在$R(a)$中,所以$|R(a)|\geqslant 2^{|S|}>|S|$. 因此$R(a)$不是循环系,矛盾. 矛盾说明当$xs=xt$时, $s=t$. 即S是左可消的.

设$a_i \in S, i \in I$,使得$\cap_{i\in I}a_iS \neq \varnothing$.对任意$x \in \cap_{i\in I}a_iS$和任意$i,j \in I$,存在$b_i, b_j \in S$使得$x = a_ib_i = a_jb_j$.令$a = (a_i)_{i\in I}, b = (b_i)_{i\in I}$.则$b \in R(a)$,所以存在$u = (u_i)_{i\in I} \in S^I$,使得$R(a) = (u_i)_{i\in I}S$.因此$b = us, s \in S$. 故$x = a_ib_i = a_iu_is$.令$t = a_iu_i = a_ju_j$, $i,j \in I$, 则$\cap_{i\in I}a_iS = tS$.

设$x, y \in S$使得$r(x,y) \neq \varnothing$.设I是任意集合. 对任意$i \in I$,令$a_i \in \{x,y\}$且所有a_i不能全是x 或全是y. 令$a = (a_i)_{i\in I}$. 则$r(a) \neq \varnothing$.由(3)知存在$s \in S$,使得$r(a) = sS$.显然$s \in r(x,y)$.又对任意$t \in r(x,y), t \in r(a)$, 所以$t \in sS$.故有$r(x,y) = sS$.

(4) $\Longrightarrow$(5) 设$\varnothing \neq X \subseteq S$.记$\{b_j | j \in J\}$是$X$的所有公因子的集合.对任意$x \in X, x \in \cap_{j\in J}b_jS$.所以$\cap_{j\in J}b_jS \neq \varnothing$.由(4)知存在$d \in S$使得$\cap_{j\in J}b_jS = dS$.显然$d$即为$X$的最大公因子.

(5)$\Longrightarrow$(2) 我们只需证明S^I的每一个不可分分量是投射的即可.由命题2.4.5知, S^I的包含元素$a = g(a)a'$的不可分分量为Sa'.设$sa' = ta', a' = (a'_i)_{i\in I}$.则对任意$i \in I$, $sa'_i = ta'_i$,所以$a'_i \in r(s,t)$.设$r(s,t) = uS$,则u是$\{a'_i | i \in I\}$的公因子.由引理2.4.3知$\{a'_i | i \in I\}$的最大公因子一定是S中的可逆元,所以u是可逆元.因此$r(s,t) = S$,从而$s = t$.这就证明了$Sa' \simeq S$,所以Sa'是投射的. □

最后我们给出几个例子.

例 2.4.7 (1) 设S是所有自然数按普通乘法构成的幺半群. 则任意投射S系的直积仍为投射系.

(2) 设$S = \{2^r | r$是有理数且$r \geqslant 0\}$,则S按普通乘法构成幺半群. S的子集合$X = \{2^r | r$是有理数且$r > \sqrt{2}\}$没有最大公因子. 所以投射S-系的直积不必是投射的.

§2.5 左PP-幺半群

命题 2.5.1 循环S-系Sa是投射的当且仅当存在幂等元$e \in S$,使得$ea = a$,且对任意$x, y \in S, xa = ya \Longrightarrow xe = ye$.

证明 设Sa是投射的,则S满同态$f : S \longrightarrow Sa : s \longrightarrow sa, \forall s \in S$, 是可收缩的,所以存在$S$-同态$g : Sa \longrightarrow S$使得$fg = 1_{Sa}$.设$g(a) = e \in S$.则$a = fg(a) = f(e) = ef(1) = ea$. 设$xa = ya$,则$xe = g(xa) = g(ya) = ye$.所以$e = e^2$.

反过来, 设满足条件的幂等元e存在. 令$g : Sa \longrightarrow S$ 为 $g(sa) = se$. 显然g是S-同态,且$fg(sa) = f(se) = sea = sa$,即$fg = 1_{Sa}$. 因此$S$-满同态$f$是可收缩的,故$Sa$是投射的. □

定义 2.5.2　设A是S -系, $a \in A, e^2 = e \in S$.称a是e可消的, 如果$ea = a$且对任意$x, y \in S, xa = ya \Longrightarrow xe = ye$.

定义 2.5.3　称S是左PP幺半群,如果S的任意主左理想是投射左S -系.

下面的命题是显然的.

命题 2.5.4　S是左PP幺半群当且仅当对于S的任意元a,存在幂等元$e \in S$使得a是e可消的.

在第7章中我们将要讨论左PP幺半群的推广——正则左S系.左PP幺半群的概念在我们以后的讨论中占有很重要的地位.下面给出一类特殊的左PP幺半群的结构定理,该结果是由Fountain [83]给出的.

定理 2.5.5　设Γ是具有单位元的半格.对任意$\alpha \in \Gamma$,令S_α是右可消幺半群.对$\alpha, \beta \in \Gamma$且$\alpha > \beta$,设有幺半群同态$\phi_{\alpha,\beta} : S_\alpha \longrightarrow S_\beta$ 使得若$\alpha > \beta > \gamma$, 则有$\phi_{\alpha,\gamma} = \phi_{\beta,\gamma}\phi_{\alpha,\beta}$.令$\phi_{\alpha,\alpha}$是$S_\alpha$上的单位自同构, $S = \dot{\cup}_{\alpha\in\Gamma} S_\alpha$,规定$S$中的乘法运算如下:

$$a_\alpha \cdot b_\beta = \phi_{\alpha,\alpha\beta}(a_\alpha)\phi_{\beta,\alpha\beta}(b_\beta), \qquad \forall\ a_\alpha \in S_\alpha, b_\beta \in S_\beta.$$

则S是左PP幺半群,且其幂等元都是中心元.

反之,任意幂等元都是中心元的左PP幺半群都可按上述方法构造.

证明　容易证明$S = \dot{\cup}_{\alpha\in\Gamma} S_\alpha$按照如上定义的乘法运算构成一个半群.又因为$\Gamma$有单位元且$S_\alpha$是幺半群,所以$S$也是幺半群($S$的单位元就是$S_{\alpha_0}$的单位元,这里$\alpha_0$是$\Gamma$的单位元).

记S_α的单位元为$e_\alpha, \alpha \in \Gamma$. 显然$E(S) = \{e_\alpha | \alpha \in \Gamma\}$.设$a \in S_\beta, \beta \in \Gamma$.则有

$$\begin{aligned} a \cdot e_\alpha &= \phi_{\beta,\alpha\beta}(a)\phi_{\alpha,\alpha\beta}(e_\alpha) = \phi_{\beta,\alpha\beta}(a)e_{\alpha\beta} \\ &= e_{\alpha\beta}\phi_{\beta,\alpha\beta}(a) = \phi_{\alpha,\alpha\beta}(e_\alpha)\phi_{\beta,\alpha\beta}(a) \\ &= e_\alpha \cdot a, \end{aligned}$$

这里$\phi_{\alpha,\alpha\beta}(e_\alpha) = e_{\alpha\beta}$是因为$\phi_{\alpha,\alpha\beta}$ 是幺半群同态.所以e_α 和S的所有元都可交换,因此幂等元都是中心元.

设$a \in S_\alpha$.则显然有$e_\alpha a = a$.设$s \in S_\beta, t \in S_\delta$,满足$sa = ta$, 则

$$\phi_{\beta,\alpha\beta}(s)\phi_{\alpha,\alpha\beta}(a) = \phi_{\delta,\delta\alpha}(t)\phi_{\alpha,\delta\alpha}(a).$$

显然$\alpha\beta = \delta\alpha$. 因为$S_{\alpha\beta}$是右可消幺半群,所以有

$$\phi_{\beta,\alpha\beta}(s) = \phi_{\delta,\delta\alpha}(t).$$

因此

$$\phi_{\beta,\alpha\beta}(s)\phi_{\alpha,\alpha\beta}(e_\alpha) = \phi_{\delta,\delta\alpha}(t)\phi_{\alpha,\alpha\delta}(e_\alpha),$$

即$se_\alpha = te_\alpha$.所以a是e_α-可消的.由命题2.5.4即知S是左PP幺半群.

反过来,设S是左PP幺半群,且其幂等元都是中心元.显然$E(S)$是半格且含有单位元. 对任意$e \in E(S)$,令

$$S_e = \{a \in S | a\text{是}e\text{可消的}\}.$$

设$e, f \in E(S)$,$a \in S_e \cap S_f$,则a是e可消的,也是f可消的.因此$ea = a, fa = a$.所以$ef = f, fe = e$. 从而$e = f$.这说明当$e \neq f$时$S_e \cap S_f = \varnothing$. 所以由命题2.5.4知有

$$S = \dot{\bigcup_{e\in E(S)}} S_e.$$

设$e, f \in E(S), a \in S_e, b \in S_f$.则$efab = f(ea)b = fab = a(fb) = ab$.若$sab = tab$,则$saf = taf$,故$sfa = tfa$,所以$sef = sfe = tfe = tef$.这说明$ab$是$ef$可消的,所以$ab \in S_{ef}$.同理$ba \in S_{ef}$.所以对任意$e \in E(S)$, S_e是子半群,且以e为其单位元.设$a, b, c \in S_e$且$ba = ca$, 则$be = ce$,即$b = c$.这说明每个S_e是右可消幺半群.

设$e, f \in E(S)$且$e \geqslant f$.规定映射$\phi_{e,f} : S_e \longrightarrow S_f$如下:

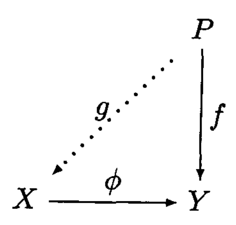
$$\phi_{e,f}(a) = af, \qquad \forall\, a \in S_e.$$

容易看出$\phi_{e,f}$ 是有定义的,且是幺半群同态.设$e \geqslant f \geqslant g$,则对任意$a \in S_e$, $\phi_{f,g}\phi_{e,f}(a) = \phi_{f,g}(af) = afg = ag = \phi_{e,g}(a)$,所以$\phi_{f,g}\phi_{e,f} = \phi_{e,g}$.又$\phi_{e,e}(a) = ae = ea = a$,所以$\phi_{e,e}$ 是S_e的单位自同构.设$a \in S_e, b \in S_f$,则

$$ab = efab = (aef)(bef) = \phi_{e,ef}(a)\phi_{f,ef}(b).$$

所以S具有所需要的结构. □

本章讨论了投射S -系及拟投射S -系的基本性质. 投射S -系的另一类重要推广是H. Oltmanns 在其博士论文[199]中研究的$(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$-投射系. 设$\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ 是由S -系构成的类. 称左S -系P是$(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$-投射的,如果对于任意$X \in \mathcal{X}$, 任意$Y \in \mathcal{Y}$, 任意$S$ -满同态$\phi : X \longrightarrow Y$,任意$S$ -同态$f : P \longrightarrow Y$, 存在S -同态$g : P \longrightarrow X$使得下图可换:

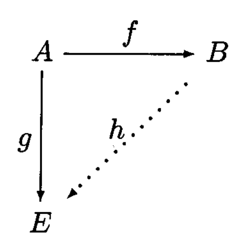


显然(S -Act, S -Act)-投射系即为投射系. S -系P是($\{P\}$, S -Act)-投射的当且仅当P为拟投射系.设M是S -系.令$\mathcal{X} = \{M\}$,则($\mathcal{X}$, S -Act)-投射系称为M-投射系. 若记$qrc(S) = \{S/\rho|\ \rho$ 是S上的左同余$\}$,则($\{S\}$, $qrc(S)$)-投射系称为弱投射系 (参见文献[161]). 若记$qprc(S) = \{S/\rho(x,y)|\ \rho(x,y)$ 是S上的由(x,y)生成的左同余, $x,y \in S$ $\}$. 则($\{S\}$, $qprc(S)$)-投射系称为主弱投射系 (参见文献[161]). 若记$Rq(S) = \{S/I|\ I$ 是S的右理想$\}$. 则($\{S\}$, $Rq(S)$)-投射系称为Rees弱投射系 (参见文献[161]). 若记$Rpq(S) = \{S/sS|\ s \in S\}$. 则($\{S\}$, $Rpq(S)$)-投射系称为主Rees弱投射系 (参见文献[161]). 关于S -系的上述广义投射性质的研究,参见文献[161], [162],[199],[200].

第3章　内　射　性

§3.1　内射S-系

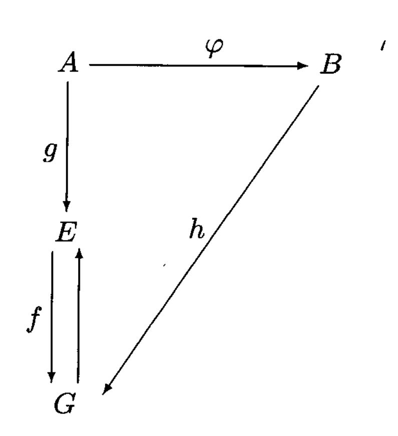
定义 3.1.1　设S是幺半群,E是S -系. 称E是内射的,如果对任意S -单同态$f : A \longrightarrow B$和任意S -同态$g : A \longrightarrow E$,存在S -同态$h : B \longrightarrow E$使得下图可换:



在第2章中,我们定义了S -满同态是可收缩的概念,并用来刻画投射S -系.同样,为了刻画内射S -系,我们需要S -单同态是可收缩的概念.设$f : A \longrightarrow B$是S -单同态.称f是可收缩的，如果存在S -同态$g : B \longrightarrow A$使得$gf = 1_A$.

命题 3.1.2　设S -单同态$f : E \longrightarrow G$是可收缩的.如果G是内射系，则E也是内射系.

证明　设$\phi : A \longrightarrow B$是$S$ -单同态，$g : A \longrightarrow E$是S -同态.由下图即得结论.



□

为了给出内射S -系的例子，对于任意S -系A我们引进下述记号：

$$A^S = \{f | f\text{是从}S\text{到}A\text{的映射}\}.$$

如下规定S在A^S上的左作用：

$$(sf)(x) = f(xs), \qquad \forall f \in A^S, \qquad \forall\, s, x \in S.$$

显然$sf \in A^S$. 对任意$s, t, x \in S$,因为

$$(t(sf))(x) = (sf)(xt) = f(xts) = ((ts)f)(x),$$
$$(1f)(x) = f(x \cdot 1) = f(x),$$

所以A^S是S -系.

命题 3.1.3 对于任意S -系A，A^S是内射S -系.

证明 设$\phi : B \longrightarrow C$是任意$S$ -单同态，$g : B \longrightarrow A^S$是任意$S$ -同态.如下定义映射$h : C \longrightarrow A^S$:对任意$c \in C$，令

$$h(c)(t) = \begin{cases} g(\phi^{-1}(tc))(1), & \text{如果}tc \in \mathrm{Im}\phi, \\ a, & \text{否则}, \end{cases}$$

这里$a \in A$是事先任意固定的一个元素，$t \in S$. 因为ϕ是单同态，所以$\phi^{-1}(tc)$是唯一的. 因此h确实是从C到A^S的映射.下证h还是S -同态.对任意$s, t \in S$,

$$h(sc)(t) = \begin{cases} g(\phi^{-1}(tsc))(1), & \text{如果}tsc \in \mathrm{Im}\phi, \\ a, & \text{否则}, \end{cases}$$
$$= \begin{cases} h(c)(ts), & \text{如果}tsc \in \mathrm{Im}\phi, \\ a, & \text{否则}, \end{cases}$$
$$= \begin{cases} (sh(c))(t), & \text{如果}tsc \in \mathrm{Im}\phi, \\ a, & \text{否则}, \end{cases}$$

所以$h(sc) = sh(c)$.即h是S -同态.

又因为对任意 $b \in B$, 任意 $t \in S$, 有 $h\phi(b)(t) = h(\phi(b))(t) = g(\phi^{-1}(t\phi(b)))(1) = g(\phi^{-1}(\phi(tb)))(1) = g(tb)(1) = tg(b)(1) = g(b)(1 \cdot t) = g(b)(t)$,所以$h\phi = g$.因此$A^S$是内射系. □

推论 3.1.4 任意S -系A可嵌入到一个内射系中.

证明 由命题3.1.3知A^S是内射S -系.作映射$\phi : A \longrightarrow A^S$ 为:

$$\begin{aligned} \phi(a) : S &\longrightarrow A : \\ x &\longrightarrow xa, \quad \forall x \in S, \quad \forall a \in A. \end{aligned}$$

对任意$s,x\in S$,任意$a\in A$, $\phi(sa)(x)=xsa=\phi(a)(xs)=(s\phi(a))(x)$,所以$\phi(sa)=s\phi(a)$,即$\phi$ 是S -同态.设$a,b\in A$使得$\phi(a)=\phi(b)$,则对任意$x\in S$, $\phi(a)(x)=\phi(b)(x)$,即$xa=xb$,所以$a=b$.这说明ϕ还是单同态. □

下面我们可以给出内射S -系的等价刻画.

定理 3.1.5 对于S -系E，以下几条等价:

(1) E是内射S -系;

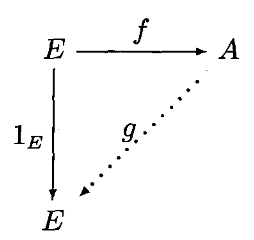
(2) 函子$\mathrm{Hom}_S(-,E)$(从范畴S -Act到集合范畴)把单同态变为满映射;

(3) 任意S -单同态$f:E\longrightarrow A$是可收缩的;

(4) 存在S -系B以及可收缩的S -单同态$f:E\longrightarrow B^S$.

证明 (1)$\Longleftrightarrow$(2)是显然的.

(1)$\Longrightarrow$(3) 对任意S -单同态$f:E\longrightarrow A$，由E的内射性可知存在S -同态$g:A\longrightarrow E$使得下图交换:



所以f是可收缩的.

(3)$\Longrightarrow$(4) 令$B=E$,由推论3.1.4知存在S -单同态$f:E\longrightarrow E^S$.由(3)知f是可收缩的.

(4)$\Longrightarrow$(1) 由命题3.1.3知B^S是内射系，所以由命题3.1.2知E也是内射系. □

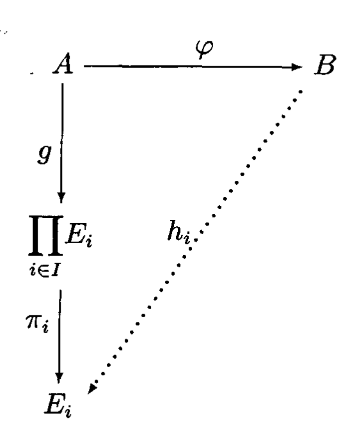
下面讨论内射S -系的若干性质.

命题 3.1.6 任意内射系必含有零元.

证明 设E是内射S -系.记$S^0=S\dot{\cup}\{\theta\}$,其中$\{\theta\}$是单元$S$ -系.显然有S -单同态$f:S\longrightarrow S^0$.取定$x\in E$.作S -同态$g:S\longrightarrow E$为$g(s)=sx,\forall\ s\in S$.由E的内射性知存在S -同态$h:S^0\longrightarrow E$，使得$hf=g$.记$h(\theta)=a\in E$.则对任意$s\in S$, $sa=sh(\theta)=h(s\theta)=h(\theta)=a$,即$a$是$E$的零元. □

命题 3.1.7 设$E_i(i\in I)$,是S -系.则$\prod_{i\in I}E_i$是内射系当且仅当对任意$i\in I$, E_i是内射系.

证明　设每个$E_i(i \in I)$,都是内射系.对于任意S -单同态$\phi : A \longrightarrow B$和任意$S$ -同态$g : A \longrightarrow \prod_{i\in I} E_i$,存在$S$ -同态$h_i : B \longrightarrow E_i$使得下图可换：



所以由直积的定义即知存在S -同态$h : B \longrightarrow \prod_{i\in I} E_i$使得$\pi_i h = h_i, i \in I$.所以$\pi_i g = \pi_i h\phi$.由于$i$是任意的，所以$g = h\phi$.即$\prod_{i\in I} E_i$ 是内射的.

反过来，设$\prod_{i\in I} E_i$是内射的，则由命题3.1.6知$\prod_{i\in I} E_i$ 中含有零元，设其为$\theta = (\theta_i)_{i\in I}$,这里$\theta_i \in E_i, \forall\ i \in I$.容易证明对任意$i \in I, \theta_i$是$E_i$的零元.由推论3.1.4知对任意$i \in I$, 存在内射$S$ -系A_i以及S -单同态$f_i : E_i \longrightarrow A_i$.记$\pi_i : \prod_{i\in I} E_i \longrightarrow E_i$和$\sigma_i : \prod_{i\in I} A_i \longrightarrow A_i$为自然同态.由直积的泛性质知存在$S$ -同态$f : \prod_{i\in I} E_i \longrightarrow \prod_{i\in I} A_i$使得$\sigma_i f = f_i\pi_i, i \in I$.设$x, y \in \prod_{i\in I} E_i$使得$f(x) = f(y)$,则对任意$i \in I, f_i\pi_i(x) = \sigma_i f(x) = \sigma_i f(y) = f_i\pi_i(y)$.而$f_i$是单同态，所以$\pi_i(x) = \pi_i(y)$.从而$x = y$.这说明$f$是$S$ -单同态.由$\prod_{i\in I} E_i$ 的内射性即知f是可收缩的，所以存在S -同态$g : \prod_{i\in I} A_i \longrightarrow \prod_{i\in I} E_i$, 使得$gf = 1$.设$i \in I$.对任意$a \in E_i$,令

$$x_j = \begin{cases} a, & j = i, \\ \theta_j, & j \neq i. \end{cases}$$

则$x_a = (x_j)_{j\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$.显然映射$\phi : E_i \longrightarrow \{x_a | a \in E_i\} : \phi(a) = x_a$是$S$ -同构且$\phi^{-1} = \pi_i$. 同理对任意$a \in A_i$可定义S -同构$\psi(a) \in \prod_{i\in I} A_i$ 且$\psi^{-1} = \sigma_i$.因此对任意$a \in E_i$, $a = \pi_i\phi(a) = \pi_i g f\phi(a) = \pi_i g\psi f_i(a)$,因此有$\pi_i g\psi f_i = 1_{E_i}$.这说明$S$ -单同态f_i是可收缩的.所以E_i是内射S -系.　□

由定义可以看出，内射系是投射系的对偶概念.我们已知自由系是特殊的投射系.下面我们给出余自由系的概念，它是特殊的内射系.

定义 3.1.8　称S -系A是余自由的，如果存在S -系B使得$A \simeq B^S$.

显然，余自由系是内射的.反之则不然.例如，令$S=\{1,0\}, A=\{\theta,a\}$.按普通的定义即可使$A$成为$S$-系.设$\alpha,\beta\in A^S$分别为：

$$\alpha(1)=\theta,\quad \alpha(0)=\theta;$$

$$\beta(1)=a,\quad \beta(0)=\theta.$$

则$\{\alpha,\beta\}$是A^S的子系. 显然$\{\alpha,\beta\}$不是余自由的.但由定理3.4.17即知$\{\alpha,\beta\}$ 是内射的.

我们知道，任意S-系都是某个自由系的商系.从推论3.1.4的证明过程即得：

命题 3.1.9 任意S-系都是某个余自由系的子系.

§3.2 内 射 包

设A为S-系.由§3.1的内容知A可以嵌入于一个内射 S-系之中, 换言之, 存在内射S-系包含 A 为子系. 直观地讲, 我们希望找到一个"最小"的包含A的内射S-系.这需要以下的概念.

定义 3.2.1 设B是S-系,A是B的子系.说A是B的基本子系,如果对任意S-系C和任意S-同态$\phi: B\longrightarrow C$，若$\phi|_A$是单同态，则ϕ是单同态.此时我们也称B是A的基本扩张，或者A 在B中是大的，记为$A\leqslant_e B$.

命题 3.2.2 设B是S-系，A是B的子系.则以下几条是等价的：

(1) A是B的基本子系;

(2) 如果λ是B上的同余且$\lambda\neq 1$，则λ限制在A上也不等于1;

(3) 任意$b_1,b_2\in B, b_1\neq b_2$,存在$a_1,a_2\in A$,$a_1\neq a_2$使得$a_1\lambda(b_1,b_2)a_2$;

(4) 任意满足$A\leqslant C\leqslant B$的S-系C，若C上的同余$\lambda\neq 1$，则λ限制在A上也不等于1;

(5) 任意满足$A\leqslant C\leqslant B$的S-系C，若定义在C上的S-同态ϕ不是单同态，则$\phi|_A$也不是单同态.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 设λ是B上的同余且$\lambda\neq 1$, 则自然同态$B\longrightarrow B/\lambda$不是单同态，因此$A\longrightarrow B/\lambda$也不是单同态.所以$\lambda$限制在$A$上不是恒等同余.

(2)$\Longrightarrow$(3) 设$b_1,b_2\in B, b_1\neq b_2$, 则$\lambda(b_1,b_2)\neq 1$.由(2)知$\lambda(b_1,b_2)$限制在$A$上也不等于1.所以存在$a_1,a_2\in A$, $a_1\neq a_2$,但$a_1\lambda(b_1,b_2)a_2$.

(3)$\Longrightarrow$(4) 设λ是C上的同余且$\lambda\neq 1$,则存在$b_1,b_2\in C\leqslant B, b_1\neq b_2$, 使得$b_1\lambda b_2$.由(3)知存在$a_1,a_2\in A$, $a_1\neq a_2$, 满足$a_1\lambda(b_1,b_2)a_2$. 所以$a_1\lambda a_2$.

(4)$\Longrightarrow$(5) 设S-同态$\phi: C\longrightarrow D$不是单的，则$\mathrm{Ker}\phi\neq 1$.由(4)知$\mathrm{Ker}\phi$ 限制在A上也不等于1，即存在$a_1,a_2\in A$, $a_1\neq a_2$, 使得$\phi(a_1)=\phi(a_2)$.所以$\phi|_A$不是单同态.

(5)$\Longrightarrow$(1) 令$C = B$即可. $\square$

推论 3.2.3 设$A \leqslant C \leqslant B$.则$A \leqslant_e B \Longleftrightarrow A \leqslant_e C$且$C \leqslant_e B$.

证明 $\Longrightarrow$这是显然的.

$\Longleftarrow$)对任意$b_1, b_2 \in B, b_1 \neq b_2$, 存在$c_1, c_2 \in C, c_1 \neq c_2$,满足$(c_1, c_2) \in \lambda(b_1, b_2)$.对于$c_1, c_2$,又存在$a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$, 满足$(a_1, a_2) \in \lambda(c_1, c_2)$.所以$(a_1, a_2) \in \lambda(b_1, b_2)$. $\square$

推论 3.2.4 设A是B的基本子系.若存在S -系C, $A \leqslant C \leqslant B$, 使得自然包含同态$A \longrightarrow C$是可收缩的, 则$A = C$.

证明 设S -同态$g : C \longrightarrow A$满足$g|_A = 1$,则$g = 1$,所以$A = C$. $\square$

推论 3.2.5 设B是A的基本扩张, C是A的内射扩张, 则B同构于C的一个子系.

证明 由C的内射性知存在S -同态$f : B \longrightarrow C$使得$f|_A$是单同态, 所以f是单同态. $\square$

为了给出内射S -系的一个重要特征, 我们需要下面的技术性引理.

引理 3.2.6 设$A \leqslant B, \lambda$是B上的同余且是集合

$$\{\lambda | \lambda \text{ 是}B\text{上的同余}, \lambda\text{限制在A上为恒等同余}\}$$

中的极大元, 则$A \simeq A/\lambda \leqslant_e B/\lambda$.

证明 $A \simeq A/\lambda$是显然的.

设η是B/λ上的同余, 且η限制在A/λ上时为恒等同余.定义

$$b_1 \rho b_2 \Longleftrightarrow \overline{b_1} \eta \overline{b_2},$$

则ρ是B上的同余, 且ρ限制在A上时为恒等同余.设$b_1 \lambda b_2$,则$\overline{b_1} = \overline{b_2}$,所以$\overline{b_1} \eta \overline{b_2}$, 因此$b_1 \rho b_2$.这说明$\lambda \subseteq \rho$.由$\lambda$的极大性即知$\lambda = \rho$.设$b_1, b_2 \in B$使得$\overline{b_1} \eta \overline{b_2}$,则$b_1 \rho b_2$, 所以$b_1 \lambda b_2$,因此$\overline{b_1} = \overline{b_2}$. 这就证明了$\eta$是$B/\lambda$上的恒等同余. $\square$

下面给出内射系的一个重要特征.

定理 3.2.7 S -系A是内射的当且仅当A没有真的基本扩张.

证明 设A是内射的, 且$A \leqslant_e B$.则包含同态$A \longrightarrow B$是可收缩的, 所以存在S -同态$g : B \longrightarrow A$,使得$g|_A = 1$.由于$A \leqslant_e B$,所以g是S -单同态, 因此$A = B$.

反过来, 设A没有真的基本扩张.设B是A的真扩张, 则A不是B的基本子系, 所以存在B上的同余$\lambda \neq 1$, 但λ限制在A上时为恒等同余.令

$$\mathscr{D} = \{\rho | \rho \text{ 是}B\text{上的同余且}\rho\text{限制在}A\text{上时为恒等同余}\}.$$

由Zorn引理知$\mathscr{D}$中有极大元，设其为λ.由引理3.2.6 即知$A \simeq A/\lambda \leqslant_e B/\lambda$. 所以 $A/\lambda = B/\lambda$. 因此对任意 $b \in B$, 存在唯一的 $a \in A$ 使得 $\overline{b} = \overline{a}$. 规定$S$ -同态$f: B \longrightarrow A$ 为$f(b) = a, \forall b \in B$.则$f|_A = 1$.所以$S$ -同态$A \longrightarrow B$是可收缩的.这就证明了A是内射S -系. □

定理 3.2.8 设A是S -系.则存在内射S -系B使得$A \leqslant_e B$.

证明 由§3.1可知存在内射S -系E使得$A \leqslant E$.令

$$\mathscr{D} = \{B | A \leqslant_e B \leqslant E\},$$

则$\mathscr{D} \neq \varnothing$.设$\{B_i | i \in I\}$是$\mathscr{D}$中的升链.令$B = \cup_{i \in I} B_i$,由命题3.2.2(3)容易证明$A \leqslant_e B$.所以由Zorn引理知$\mathscr{D}$中有极大元，设其为$B$.若$C$是$B$的基本扩张，则由推论3.2.3知$C$是$A$的基本扩张，所以$B = C$.这说明$B$没有真的基本扩张，因此由定理3.2.7 知$B$是内射的. □

定义 3.2.9 S -系A的内射的基本扩张称为A的内射包.

定理3.2.8告诉我们，任意S -系A都有内射包.

定理 3.2.10 S -系A的内射包在同构的意义下是唯一的.

证明 由推论3.2.5和定理3.2.7容易证明. □

因此我们把S系A的内射包记为$I(A)$.

下面的定理告诉我们A的内射包$I(A)$即为“最小”的包含A的内射系.

定理 3.2.11 对S系A和B，以下几条是等价的:

(1) B是A的内射包;

(2) B是A的内射的基本扩张;

(3) B是A的极大的基本扩张;

(4) B是A的极小的内射扩张.

证明 由定理3.2.7和推论3.2.5容易证明(1)$\Longleftrightarrow$(3).(2)即为内射包的定义.

(1)$\Longrightarrow$(4) 设内射系E满足$A \leqslant E \leqslant B$.由$A \leqslant_e B$即得$E \leqslant_e B$.所以由推论3.2.4知$E = B$.

(4)$\Longrightarrow$(1) 设B是A极小的内射扩张，$I(A)$是A的内射包.由推论3.2.5知$I(A)$同构于B的一个子系.而$I(A)$是内射的，所以由B的极小性即知$B \simeq I(A)$. □

许多特殊幺半群上的S-系的内射包已被具体地构造出来，参看文献[142]、[48]、[95]、[190]和[64]等.

§3.3 完全α -绝对纯幺半群

S -系A的内射性和A上方程组的可解性之间有密切的联系.为了揭示这一联系，我们先介绍如下概念.

设A是S -系. A上的任意方程应具有下列三种形式之一：

$$sx = a, \quad sx = ty, \quad sx = tx, \tag{3.3.1}$$

这里$s, t \in S, a \in A, x, y$是未定元. A上的任意方程组都是若干个(有限或无限)上述方程构成的集合.我们记A上的方程组Σ中所含方程的个数为$|\Sigma|$.

定义 3.3.1 称A上的方程组Σ是容许的，如果Σ在A的某个扩张系中有解.

下面的定理给出了A的内射性和A上方程组的可解性之间的联系.

定理 3.3.2 对于S -系A，以下两条是等价的：

(1) A是内射的;

(2) A上的任意容许方程组在A中有解.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 设Σ是A上的容许方程组，则存在A的扩张系B，使得Σ在B中有解.因为A是内射的，所以自然包含同态$A \longrightarrow B$是可收缩的，即存在S -同态$f : B \longrightarrow A$使得$f|_A = 1$.显然f 把Σ在B中的解变为Σ在A中的解.

(2)$\Longrightarrow$(1) 设B是A的扩张系.则存在$B-A$的子集合C使得$B = A \cup (\cup_{c \in C} Sc)$.定义$A$上的方程组

$$\Sigma = \{sx_c = a | sc = a \in A, c \in C\} \cup \{sx_c = tx_d | sc = td, c, d \in C\}.$$

显然Σ在B中有解$\{c | c \in C\}$，所以Σ是A上的容许方程组.因此Σ在A中有解，设解为$\{a_c | c \in C\}$.定义映射$\phi : B \longrightarrow A$为：

$$\phi(a) = a, \qquad \forall a \in A,$$
$$\phi(sc) = sa_c, \qquad \forall\, s \in S, \forall\, c \in C.$$

容易验证ϕ是有定义的，且ϕ是S -同态，$\phi|_A = 1$.所以包含同态$A \longrightarrow B$是可收缩的，故A是内射系. □

定义 3.3.3 设B是S -系，A是B的子系，α是无穷基数.称A 在B中是α -纯的(或称A是B的α -纯子系)，如果A上只有一个未知元且满足$|\Sigma| < \alpha$的任意方程组Σ,若Σ在B中有解, 则在A中一定有解.如果A在它的任意扩张系中都是α -纯的，那么就称A是α -绝对纯的.

由定理3.3.2知对任意无穷基数α，内射系是α -绝对纯的.显然S -系A是α -绝对纯的当且仅当A上的只有一个未定元且满足$|\Sigma| < \alpha$的任意容许方程组Σ在A中一定有解.

定义 3.3.4 称幺半群S是完全左内射的,如果任意S -系是内射的.完全右内射幺半群可类似地定义.称幺半群S是完全α -绝对纯的,如果任意S -系都是α -绝对纯的.

关于完全左内射幺半群的讨论我们放在§3.4.本节主要研究完全α -绝对纯幺半群，其主要结果选自文献[183].

定理3.3.2表明，S -系A的内射性可通过A上容许方程组的可解性来刻画.下面的定理说明，完全左内射幺半群也可通过α -绝对纯性来刻画.

定理 3.3.5 设S是幺半群，α是无穷基数且$\alpha > |S|$.则如下两条等价：

(1) S是完全α -绝对纯的；

(2) S是完全左内射幺半群.

证明 (2)$\Longrightarrow$(1) 由定理3.3.2即得结论.

(1)$\Longrightarrow$(2) 设A是S -系.我们要证明A是内射的.记A的内射包为$I(A)$.令

$$\mathscr{D} = \{(B,\phi) | A \leqslant B \leqslant I(A), \quad \phi \in \mathrm{Hom}_S(B,A)\text{且}\phi|_A = 1\}.$$

因为$(A,1) \in \mathscr{D}$,所以$\mathscr{D} \neq \emptyset$.设$(B_1,\phi_1),(B_2,\phi_2) \in \mathscr{D}$，规定$(B_1,\phi_1) \leqslant (B_2,\phi_2) \Longleftrightarrow B_1 \leqslant B_2$且$\phi_2|_{B_1} = \phi_1$.$\mathscr{D}$关于$\leqslant$构成一个半序集. 容易证明$\mathscr{D}$中的任意升链都有上界. 故由Zorn引理知$\mathscr{D}$中有极大元，设其为$(B_0,\phi_0)$.下证$B_0 = I(A)$.否则若$B_0 \neq I(A)$,则存在$b \in I(A) - B_0$. 令$C = B_0 \cup Sb$,则$A \leqslant C \leqslant I(A)$.考虑方程组：

$$\begin{aligned} \Sigma = &\{sx = a | sb = a, s \in S, a \in B_0\} \\ &\cup \{sx = tx | sb = tb, s,t \in S\}. \end{aligned}$$

Σ只有一个未定元x,且

$$|\Sigma| \leqslant |S| + |S|^2 < \alpha.$$

又Σ在$I(A)$中有解b,故由B_0的α -绝对纯性知Σ在B_0中有解，设其为$a_0 \in B_0$.作同态：$\phi : C \longrightarrow A$,

$$\phi(a) = \phi_0(a), \quad \phi(sb) = s\phi_0(a_0), \quad \forall a \in B_0, \quad \forall\, s \in S.$$

设$sb = tb$,则方程$sx = tx \in \Sigma$.所以有$sa_0 = ta_0$,故$\phi(sb) = s\phi_0(a_0) = \phi_0(sa_0) = \phi_0(ta_0) = t\phi_0(a_0) = \phi(tb)$. 若存在$s \in S$,使得$sb = a \in B_0$,则方程$sx = a \in \Sigma$.故有$sa_0 = a$.所以$\phi(sb) = s\phi_0(a_0) = \phi_0(sa_0) = \phi_0(a) = \phi(a)$.这就证明了$\phi$是映射.显然$\phi$还是$S$ -同态.因为$\phi|_A = \phi_0|_A = 1$, 所以$(C,\phi) \in \mathscr{D}$.又显然$(B_0,\phi_0) \leqslant (C,\phi)$但$(B_0,\phi_0) \neq (C,\phi)$.这与$(B_0,\phi_0)$的极大性矛盾.所以$B_0 = I(A)$.故存在$S$ -同态$\phi_0 : I(A) \longrightarrow A$, 使得$\phi_0|_A = 1$.这说明$A$是$I(A)$的可收缩子系，因此$A$是内射的. □

我们称式(3.3.1)中的三类方程分别为I、II、III型方程.由定理3.3.5的证明及定理3.3.2 即知有：

推论 3.3.6 S是完全左内射幺半群当且仅当对于任意S -系A，A上的由I、III型方程构成的任意容许方程组在A中有解.

定义 3.3.7 设A是S -系，λ是A上的同余.称A是α -生成的，如果存在A的一个生成元集合其基数$<\alpha$;称λ是α -生成的，如果存在λ的一个生成元集合其基数$<\alpha$.称A是α -表示的，如果$A\simeq F/\lambda$,其中F是α -生成的自由S -系，λ是F上的α -生成同余. 称A是循环α -表示的，如果A是α -表示的且$F=S$.

当$\alpha=\aleph_0$时，α -生成即为有限生成.我们称$\aleph_0$-表示S -系为有限表示S -系，循环$\aleph_0$-表示S -系为循环表示S -系.

以下总是假定α是无穷基数.

引理 3.3.8 设B是S -系，A是B的子系.则A在B中是α -纯的当且仅当：对任意循环α -表示S -系M，任意S -同态$f: M\longrightarrow B$, M的任意满足$|L|<\alpha$, $f(L)\subseteq A$的子集合L，存在S -同态$g: M\longrightarrow A$，使得对任意$x\in L, g(x)=f(x)$.

证明 设A在B中是α -纯的.因为M是循环α -表示的，故可设$M=S/\lambda$,这里 λ 是 S 上的 α -生成左同余. 如果 $L=\varnothing$且$\lambda=1_S$, 则$M=S$.这时作同态$g: M\longrightarrow A$为$g(s)=sa_0$,这里a_0是A中事先固定的某个元素，则g即满足要求.下设$\lambda\neq 1_S$或$L\neq\varnothing$.设λ的生成元集为C，则$|C|<\alpha$. 对任意$z\in L, z$可表示为$\overline{u_z}, u_z\in S$.取定某个$u_z\in S$使得$z=\overline{u_z}$. 记$a_z=f(z)=f(\overline{u_z})$.考虑方程组：

$$\Sigma=\{sx=tx|(s,t)\in C\}\cup\{u_zx=a_z|z\in L\},$$

Σ只有一个未定元，且

$$|\Sigma|=|C|+|L|<\alpha+\alpha=\alpha.$$

对任意$(s,t)\in C$,有

$$sf(\overline{1})=f(\overline{s})=f(\overline{t})=tf(\overline{1}).$$

又对任意$z\in L$,有

$$u_zf(\overline{1})=f(\overline{u_z})=a_z.$$

所以Σ在B中有解$f(\overline{1})$.因为A在B中α -纯，所以Σ在A中有解，设其为a.作S -同态$g: M\longrightarrow A$为：$g(\overline{s})=sa$. 设$\overline{s}=\overline{t}$,则$s\lambda t$.所以$s=t$,或者存在$u_1,\cdots,u_n\in S$, (s_i,t_i)或$(t_i,s_i)\in C$ $(i=1,\cdots,n)$, 使得

$$s=u_1s_1, u_1t_1=u_2s_2,\cdots,u_{n-1}t_{n-1}=u_ns_n, u_nt_n=t.$$

所以$sa=u_1s_1a=u_1t_1a=u_2s_2a=u_2t_2a=\cdots=u_nt_na=ta$.这说明$g$是映射.显然$g$是同态.对任意$z\in L, g(z)=g(\overline{u_z})=u_za=a_z=f(z)$.

反之，设Σ是A上的一个未定元的方程组，且$|\Sigma| < \alpha$，Σ在B中有解b.我们要证明Σ在A 中有解.令

$$H = \{(s,t)|s,t \in S, sx = tx \in \Sigma\}.$$

记λ为H生成的S的左同余.因为$|\Sigma| < \alpha$，所以$|H| < \alpha$，故S/λ是循环α -表示的.令$f : S/\lambda \longrightarrow B$为$f(\overline{s}) = sb$.和前面的证明类似地可知$f$是$S$ -同态.设

$$L = \{\overline{s} \in S/\lambda|\text{存在}\Sigma\text{中的方程}sx = a, a \in A\},$$

则$|L| \leqslant |\Sigma| < \alpha$,且对任意$\overline{s} \in L$,$f(\overline{s}) = sb = a \in A$.所以由条件知存在$S$ -同态$g : S/\lambda \longrightarrow A$, 使得对任意$\overline{s} \in L$,有$g(\overline{s}) = f(\overline{s})$.设$g(\overline{1}) = a_0 \in A$.对任意$(s,t) \in H$,$\overline{s} = \overline{t}$,所以$sa_0 = sg(\overline{1}) = g(\overline{s}) = g(\overline{t}) = tg(\overline{1}) = ta_0$.对任意方程$sx = a \in \Sigma$, $sa_0 = sg(\overline{1}) = g(\overline{s}) = f(\overline{s}) = sb = a$.所以$a_0$即$\Sigma$在$A$中的解. □

称左S -系A具有α -零元，如果对S的任意子集合N,若$|N| < \alpha$，则存在$a \in A$,使得对任意$s \in N$都有$sa = a$.显然若A包含一元子系，则A具有α -零元(对于任意α).若$|S| < \alpha$，则A 具有α -零元当且仅当A包含一元子系.

引理 3.3.9 对于左S -系A，以下两条等价:

(1) A是α -绝对纯的;

(2) A具有α -零元，且对于任意循环α -表示左S -系C，C的任意α -生成的子系B，任意S -同态$g : B \longrightarrow A$，存在S -同态$f : C \longrightarrow A$，使得$f|_B = g$.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 设$N \subseteq S$，且$|N| < \alpha$.考虑方程组:

$$\Sigma = \{sx = 1x|x \in N\}.$$

显然$|\Sigma| < \alpha$.因为A的内射包$I(A)$是内射的，故存在$b \in I(A)$使得对任意$s \in S$, $sb = b$.所以Σ 在$I(A)$中有解.而A是α -绝对纯的，所以Σ在A中有解.即存在$a \in A$,使得对任意$s \in N$,有$sa = a$.

设$I(A)$是A的内射包，则存在S -同态$h : C \longrightarrow I(A)$,使得$h|_B = \sigma g$,这里$\sigma$是自然包含同态$A \longrightarrow I(A)$.又存在$B$的生成元集$M$使得$|M| < \alpha$.对任意$b \in M$, $h(b) = \sigma g(b) = g(b) \in A$.又因为$C$是循环$\alpha$ -表示的，而A是α -绝对纯的，所以由引理3.3.8知存在S -同态$f : C \longrightarrow A$, 使得对任意$b \in M$, $f(b) = h(b)$.所以$f(b) = g(b)$.因此对任意$x \in B$,有$f(x) = g(x)$.

(2)$\Longrightarrow$(1) 设$A \leqslant B$， 我们要证明 A 在 B 中是 α -纯的. 设 $M = S/\lambda$是循环α -表示S -系，$f : M \longrightarrow B$是S -同态，L是M的子集合且$|L| < \alpha$, $f(L) \subseteq A$.由引理3.3.8我们只需证明存在S -同态$g : M \longrightarrow A$，使得对任意$z \in L$,有$g(z) = f(z)$.

设$L=\varnothing$.若$\lambda=1_S$,则取定$a\in A$,令$g:M\longrightarrow A$为$g(s)=sa$.若$\lambda\neq 1_S$,设λ有一个生成元集H使得$|H|<\alpha$.设$K=\{s|s\in S$,存在$t\in S$,使得(s,t)或$(t,s)\in H\}$.则$|K|=|H|+|H|<\alpha+\alpha=\alpha$.由条件知存在$a\in A$,使得对任意$s\in K$有$sa=a$.所以对任意$(s,t)\in H$, $sa=a=ta$.作映射$g:M\longrightarrow A$为$g(\overline{s})=sa$.和引理3.3.8的证明类似地可知g是有定义的且为同态.

设 $L\neq\varnothing$. 记 $N=\cup_{a\in L}Sa$, 则 N 有一个生成元集 L 满足 $|L|<\alpha$. 令$h=f|_N:N\longrightarrow B$,则$h(a)=f(a)\in A,\forall a\in L$.所以$h$是$N$到$A$的同态.故由条件知存在$S$-同态$g:M\longrightarrow A$使得$g|_N=h$.所以对任意$z\in L, g(z)=h(z)=f(z)$. □

称幺半群S具有α -右零元，如果S -系$_SS$具有α -零元.

定理 3.3.10 对于幺半群S，以下条件等价:

(1) S是完全α -绝对纯幺半群;

(2) S具有α -零元，且对于S的任意α -生成左同余λ，任意α -生成左理想I，存在$w\in I$,使得对于任意$s\in S$,有$s\lambda sw$,且对于任意$s,t\in S$,若$s\lambda t$,则$sw\lambda tw$.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 设$L\subseteq S$且$|L|<\alpha$.因为$_SS$是α -绝对纯的，故由引理3.3.9知S具有α -右零元.

设S的左同余λ和左理想I如(2)所示.则S/λ是循环α -表示S -系，I/λ是S/λ的子系，且I/λ是α -生成的.因为I/λ是α -绝对纯的，所以由引理3.3.9知存在S - 同态$f:S/\lambda\longrightarrow I/\lambda$,使得$f|_{I/\lambda}=1$.记$f(\overline{1})=\overline{w}, w\in I$.则对于任意$s\in I,\overline{sw}=s\overline{w}=sf(\overline{1})=f(\overline{s})=\overline{s}$. 若$s\lambda t$,则$f(\overline{s})=f(\overline{t})$,所以$\overline{sw}=s\overline{w}=sf(\overline{1})=tf(\overline{1})=t\overline{w}=\overline{tw}$.

(2)$\Longrightarrow$(1) 设A是S -系.若$L\subseteq S$且$|L|<\alpha$,则由(2)知S具有α -右零元，所以存在$z\in S$,使得对于任意$s\in L, sz=z$.任取$a\in A$,则对于任意$s\in L$, $sza=za$.这说明A具有α -零元.

设C是循环α -表示S -系，B是C的α -生成子系.设L是B的生成集且$|L|<\alpha$.设$g:B\longrightarrow A$是任意S -同态.不妨假定$C=S/\lambda$,其中λ也是α -生成的.任意$b\in L$,存在$s_b\in S$,使得$b=\overline{s_b}$.令

$$K=\{s_b|b\in L\},\qquad I=\cup_{u\in K}Su.$$

则I是S的左理想.又因为$|K|=|L|<\alpha$,所以由条件可知存在$w\in I$,使得对任意$s\in I$, $s\lambda sw$,且对于任意$s,t\in S, s\lambda t\Longrightarrow sw\lambda tw$.作映射$f:C\longrightarrow A$如下:

$$f(\overline{s})=g(\overline{sw}),\qquad \forall\overline{s}\in C.$$

容易证明$B=I\overline{1}$,所以$g(\overline{sw})=g(sw\overline{1})$有意义.设$\overline{s}=\overline{t}$, 则$\overline{sw}=\overline{tw}$,所以$f$是有定义的.显然$f$还是同态.对任意$x\in B$,存在$b\in L, t\in S$使得$x=tb$.所以$x=t\overline{s_b}=$

$\overline{ts_b}$, 故$f(x) = f(\overline{ts_b}) = g(\overline{ts_b w}) = g(\overline{ts_b}) = g(x)$,即$f|_B = g$.所以由引理3.3.9即知$A$是$\alpha$ -绝对纯的. □

推论 3.3.11 对于幺半群S，以下条件等价：

(1) S是完全左内射幺半群;

(2) S具有零元，且对于任意左同余λ，任意左理想I，存在$w \in I$,使得对任意$s \in I, s\lambda sw$, 且对于任意$s, t \in S, s\lambda t \Longrightarrow sw\lambda tw$.

证明 令α是无穷基数且$\alpha > |S|$.由定理3.3.10知S含有右零元θ.由命题3.4.1知若S是完全左内射幺半群，则S的任意左理想可由幂等元生成.设$s \in S$,则有$S\theta s \subseteq S\theta$或者$S\theta \subseteq S\theta s$.所以有$\theta s = \theta$,即$S$含有零元.其他结论由定理3.3.10 和定理3.3.2即得. □

称S -系A是绝对几乎纯的，如果A是$\aleph_0$-绝对纯的.

推论 3.3.12 对于幺半群S，以下条件等价：

(1) 所有S -系都是绝对几乎纯的;

(2) S含有$\aleph_0$-右零元，且对于任意有限生成左同余λ，任意有限生成左理想I，存在$w \in I$,使得对任意$s \in I, s\lambda sw$,且对于任意$s, t \in S, s\lambda t \Longrightarrow sw\lambda tw$.

证明 在定理3.3.10中令$\alpha = \aleph_0$即可. □

推论 3.3.13 设S是完全α -绝对纯幺半群，I是S的α -生成左理想，则I可由幂等元生成.

证明 令同余$\lambda = 1_S$,则由定理3.3.10知存在$e \in I$,使得对任意$s \in I, s\lambda se$.所以$s = se$.特别地$e^2 = e$.显然$I = Se$. □

下面我们给出一个幺半群的例子，它是完全$\aleph_0$绝对纯的，但不是完全$\aleph_1$绝对纯的.

例 3.3.14 设$\mathbb{R}$是实数集合，任意$a, b \in \mathbb{R}$,规定$a \cdot b = b \cdot a =\min\{a, b\}$.显然$\mathbb{R}$关于上述乘法构成一个交换半群.令$S = \mathbb{R}^1$.设$a \in S, a \neq 1$,则$Sa = \{b|b \in \mathbb{R}, b \leqslant a\}$.显然$S1 = S$.设$I$是$S$的有限生成左理想，则存在$a_1, \cdots, a_n \in S$使得$I = Sa_1 \cup \cdots \cup Sa_n$.若某个$a_i = 1$,则$I = S$.所以对任意左同余$\lambda$, 取$w = 1$即可利用定理3.3.10.下面假定$a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$.记$w =\max\{a_1, \cdots, a_n\}$,则$I = \{b|b \in \mathbb{R}, b \leqslant w\} = Sw$.设$\lambda$是$S$上的任意左同余.显然对任意$s, t \in S$, 若$s\lambda t$,则$sw\lambda tw$.再设$a_1, \cdots, a_m \in S$且$a_i \neq 1, i = 1, \cdots, m$.令$a_0 =\min\{a_1, \cdots, a_m\}$,则对于任意$i = 1, \cdots, m$,有$a_i a_0 = a_0$. 若某个$a_i = 1$,则对于任意$x \in S$都有$a_i x = x$.所以$S$具有$\aleph_0$-右零元.由定理3.3.10即知$S$是完全$\aleph_0$-绝对纯的.

如果S还是完全$\aleph_1$-绝对纯幺半群，则由定理3.3.10知S具有$\aleph_1$-右零元.令

$$H = \{-1, -2, -3, \cdots\} \subseteq S.$$

因为$|H| = \aleph_0 < \aleph_1$,所以存在$a \in S$,使得对任意$h \in H$,有$ha = a$.显然$a \neq 1$.所以$ha = \min\{h, a\}$.由$h$的任意性即得矛盾.所以$S$不是完全$\aleph_1$-绝对纯幺半群.

推论3.3.12给出了所有S -系都是绝对几乎纯的幺半群的“理想-同余”特征刻画，关于这类幺半群的“元素-理想”刻画可参见Gould的系列论文.

§3.4 完全左内射幺半群

在§3.3中,我们得到了完全左内射幺半群的“理想-同余”特征,本节中我们研究完全左内射幺半群的“元素-理想”特征.

关于完全左内射幺半群的研究最早开始于Feller和Gantos的文章[73],在该文中,作者研究了幂等元都是中心元的完全左内射幺半群.随后在文献[72]中,Feller和Gantos又研究了完全内射幺半群,即既是完全左内射又是完全右内射的幺半群.还是Feller和Gantos,在文献[74]中研究了完全右内射群并.这些都是特殊情形.关于一般情形下完全左内射幺半群的特征刻画问题,分别被Fountain [82]和Isbell [117]独立地解决.本节的内容主要选自于Fountain的文章[82]. 我们首先给出完全左内射幺半群的若干简单性质.

命题 3.4.1 如果S是完全左内射幺半群,那么S的任意左理想都可由幂等元生成.

证明 设L是S的左理想,则L是内射S -系.所以存在S -同态$f : S \longrightarrow L$使得$f|_L = 1$.因此$L = f(S) = Sf(1)$,且$f(1)f(1) = f(f(1)1) = f(f(1)) = f(1)$,即$f(1)$是幂等元. □

引理 3.4.2 设S的任意有限生成左理想都可由幂等元生成, $e, f \in E(S)$.若$eS \subseteq fS$,则$Se \subseteq Sf$.

证明 设$eS \subseteq fS$. 则$e = fe$.又因为$Se \cup Sf$可由幂等元生成,所以$Se \subseteq Sf$或者$Sf \subseteq Se$,因此有$e = ef$或者$f = fe$.总之有$Se \subseteq Sf$. □

命题 3.4.3 设S的任意有限生成左理想都可由幂等元生成(例如, S是完全左内射幺半群).则:

(1) S是纯整半群;

(2) 对任意$e, f \in E(S)$, $e\mathscr{R}f \Longrightarrow e = f$;

(3) 对任意$e \in E(S)$,任意$a \in S$,任意$a', a'' \in V(a), aea' = aea''$.

证明 (1) 由命题3.4.1即知S是正则的.设$e, f \in E(S)$,则$Se \subseteq Sf$或$Sf \subseteq Se$.不妨设$Se \subseteq Sf$.则$e = ef$.所以

$$(fe)(fe) = f(ef)e = fee = fe,$$

即$fe \in E(S)$.所以S是纯整的.

(2)设$e\mathscr{R}f, e,f \in E(S)$.则由引理3.4.2知$e\mathscr{L}f$.所以$e\mathscr{H}f$,从而$e = f$.

(3)因为

$$\begin{aligned}(ae)(ea')(ae) &= aea'ae = a(a'ae)(a'ae)\\ &= a(a'ae) = ae,\\ (ea')(ae)(ea') &= ea'aea' = (ea'a)(ea'a)a'\\ &= (ea'a)a' = ea',\end{aligned}$$

所以$ea' \in V(ae)$.同理$ea'' \in V(ae)$.所以

$$aea' = (ae)(ea')\mathscr{R}(ae)\mathscr{R}(ae)(ea'') = aea''.$$

又因为$(aea')(aea') = a(ea'a)(ea'a)a' = a(ea'a)a' = aea'$,所以$aea' \in E(S)$.同理$aea'' \in E(S)$. 所以由(2)即知$aea' = aea''$. □

命题 3.4.4 如下两条是等价的:

(1) S的任意有限生成左理想可由幂等元生成;

(2) S是纯整幺半群且$E(S)$是左零半群的链.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 由命题3.4.3即知S是纯整幺半群.令$B = E(S)$.由Howie[115]中的定理IV.3.1知B是矩形带$E_\gamma(\gamma \in \Gamma)$的半格,且子半群$E_\gamma$即为$B$的$\mathscr{D}$-类.设$e, f \in E_\gamma$, $e\mathscr{R}^B f$. 因为对于正则半群S有$\mathscr{R}^B = \mathscr{R}^S \cap (B \times B)$,所以有$e\mathscr{R}^S f$.由命题3.4.3即知$e = f$.这说明对任意$\gamma \in \Gamma$, E_γ是B的$\mathscr{L}$-类,从而E_γ是左零半群.设$\alpha, \beta \in \Gamma, e \in E_\alpha, f \in E_\beta$,则$Se \subseteq Sf$或$Sf \subseteq Se$.所以$e = ef$或$f = fe$.因此$\alpha = \alpha\beta$或$\beta = \beta\alpha$,从而$\alpha \leqslant \beta$或$\beta \leqslant \alpha$,即$\Gamma$是链.

(2)$\Longrightarrow$(1) 直接验证. □

设Γ是半格.我们称Γ是对偶良序的,如果Γ的任意非空子集中都有最大元.

命题 3.4.5 以下两条是等价的:

(1) S的任意左理想都可由幂等元生成;

(2) S是纯整幺半群,且存在对偶良序链Γ,以及左零半群$E_\gamma(\gamma \in \Gamma)$,使得$E(S) = \dot{\cup}_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$, 且对任意$\alpha, \beta \in \Gamma$,若$\alpha \leqslant \beta$,则$E_\alpha E_\beta \subseteq E_\alpha \supseteq E_\beta E_\alpha$.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 由命题3.4.4即知S是纯整幺半群,且$E(S)$是左零半群的链.所以我们只须证明Γ是对偶良序的即可.设Λ是Γ的非空子集.对任意$\alpha \in \Lambda$,取$e_\alpha \in E_\alpha$.则左理想$\cup_{\alpha\in\Lambda} Se_\alpha$可由幂等元生成.设$\cup_{\alpha\in\Lambda} Se_\alpha = Se$.容易证明存在$\alpha_0 \in \Lambda$,使得$Se_\alpha \subseteq Se_{\alpha_0}, \forall \alpha \in \Lambda$.所以$\alpha_0$ 即为Λ中的最大元.

(2)$\Longrightarrow$(1) 设L是S的左理想.因为S是正则的, 所以L中有幂等元. 因此存在$\alpha \in \Gamma$,使得$L \cap E_\alpha \neq \varnothing$.设$\alpha \in \Gamma$是集合$\{\alpha | \alpha \in \Gamma, L \cap E_\alpha \neq \varnothing\}$中的最大元.再设$e \in L \cap E_\alpha$.则$Se \subseteq L$.设$x \in L$,则$x'x \in L$,这里$x' \in V(x)$.因此存

在$\beta \in \Gamma$,使得$x'x \in E_\beta$.显然$\beta \leqslant \alpha$. 所以$x'xe \in E_\beta E_\alpha \subseteq E_\beta$.因为$E_\beta$ 是左零半群,所以$x'x = (x'x)(x'xe) = x'xe \in Se$,从而$x = xx'x \in Se$.这就证明了$L = Se$.即任意左理想可由幂等元生成. □

设B是带.定义B上的等价关系$\mathscr{U}$为:

$$\mathscr{U} = \{(e,f) \in B \times B | eBe \simeq fBf\}.$$

对任意$(e,f) \in \mathscr{U}$,记$W_{e,f}$为从eBe到fBf的所有同构的集合. 设$\alpha \in W_{e,f}$.如下定义$\alpha_l \in \mathscr{I}(B/\mathscr{L})$和$\alpha_r \in \mathscr{I}(B/\mathscr{R})$(这里$\mathscr{I}(X)$表示集合$X$上的所有部分一一映射所构成的半群):

$$\alpha_l(L_x) = L_{\alpha(x)}, \quad \alpha_r(R_x) = R_{\alpha(x)}, \qquad \forall x \in eBe.$$

以$\mathscr{T}_X$表示集合X上的所有全变换所构成的半群.对任意$(e,f) \in \mathscr{U}$,定义$\rho_e \in \mathscr{T}_{B/\mathscr{L}}$和$\lambda_f \in \mathscr{T}_{B/\mathscr{R}}$如下:

$$\rho_e(L_x) = L_{exe}, \qquad \lambda_f(R_x) = R_{fxf}, \qquad \forall x \in B.$$

记$\mathscr{P}\mathscr{T}(X)$为集合$X$上的所有部分映射所构成的半群,则$\mathscr{I}(X)$和$\mathscr{T}(X)$都是$\mathscr{P}\mathscr{T}(X)$的子半群.所以我们可以在$\mathscr{P}\mathscr{T}(B/L)$中作乘积$\alpha_l\rho_e$,在$\mathscr{P}\mathscr{T}(B/\mathscr{R})$中作乘积$\alpha_r^{-1}\lambda_f$.记

$$W_B = \cup_{(e,f)\in\mathscr{U}}\{(\alpha_l\rho_e, \alpha_r^{-1}\lambda_f) | \alpha \in W_{e,f}\}.$$

若S是半群,我们记S^*为S的反半群,即:作为集合,$S^* = S$,而S^*中的乘法定义为$x * y = yx$.

定理 3.4.6 设B是带,则有

(1) W_B是$\mathscr{T}^*(B/\mathscr{L}) \times \mathscr{T}(B/\mathscr{R})$的纯整子半群;

(2) W_B的幂等元带为$B^* = \{(\rho_e, \lambda_e) | e \in B\}$,且$B^* \simeq B$;

(3) 如果把B^*等同于B,则在W_B中有

$$\mathscr{D} \cap (B \times B) = \mathscr{U};$$

(4) 设$(e,f),(g,h) \in \mathscr{U}, \alpha \in W_{e,f}, \beta \in W_{g,h}$, 则有

(i)$(\alpha_l\rho_e, \alpha_r^{-1}\lambda_f)\mathscr{R}^{W_B}(\beta_l\rho_g, \beta_r^{-1}\lambda_h) \Longleftrightarrow f\mathscr{L}^B h$;

(ii)$(\alpha_l\rho_e, \alpha_r^{-1}\lambda_f)\mathscr{L}^{W_B}(\beta_l\rho_g, \beta_r^{-1}\lambda_h) \Longleftrightarrow f\mathscr{R}^B h$.

该定理的证明可见Howie[115]和Hall[111]的文章.注意$\mathscr{P}\mathscr{T}(X)$中的合成映射是从右到左的复合,而在Howie[115] 文章中的合成映射则是从左到右的复合.

称上面构造的纯整半群W_B为带B上的Hall半群.

定理 3.4.7 设B是带,则如下三条是等价的:

(1) $\mathscr{H}$是W_B上的左同余;

(2) 对任意纯整半群S,若$E(S)\simeq B$,则$\mathscr{H}$是S上的左同余;

(3) 对任意 $e,f\in B$, 任意同构 $\alpha,\beta: eBe\longrightarrow fBf$, 如果 $x\in eBe$, 则 $\alpha(x)\mathscr{L}^B\beta(x)$.

证明 (2)$\Longrightarrow$(1) 由定理3.4.6知这是显然的.

(1)$\Longrightarrow$(3) 设$e,f\in B$,且$\alpha,\beta: eBe\longrightarrow fBf$是同构.则$(e,f)\in\mathscr{U}$而$\alpha,\beta\in W_{e,f}$.设$x\in eBe$,则存在$g\in B$,使得$x=ege$.设$gBg$上的单位自同构为$\delta$.由定理3.4.6知

$$(\alpha_l\rho_e,\alpha_r^{-1}\lambda_f)\mathscr{R}^{W_B}(\beta_l\rho_e,\beta_r^{-1}\lambda_f)$$

且

$$(\alpha_l\rho_e,\alpha_r^{-1}\lambda_f)\mathscr{L}^{W_B}(\beta_l\rho_e,\beta_r^{-1}\lambda_f),$$

所以有$(\alpha_l\rho_e,\alpha_r^{-1}\lambda_f)\mathscr{H}^{W_B}(\beta_l\rho_e,\beta_r^{-1}\lambda_f)$.因为$\mathscr{H}$是$W_B$上的左同余,所以有

$$(\delta_l\rho_g,\delta_r^{-1}\lambda_g)(\alpha_l\rho_e,\alpha_r^{-1}\lambda_f)\mathscr{H}^{W_B}(\delta_l\rho_g,\delta_r^{-1}\lambda_g)(\beta_l\rho_e,\beta_r^{-1}\lambda_f).$$

在W_B中进行计算(参见Howie [115] 文章中定理VI.2.17的证明):

$$\begin{aligned}(\delta_l\rho_g,\delta_r^{-1}\lambda_g)(\alpha_l\rho_e,\alpha_r^{-1}\lambda_f) &= (\eta_l\rho_i,\eta_r^{-1}\lambda_j),\\ (\delta_l\rho_g,\delta_r^{-1}\lambda_g)(\beta_l\rho_e,\beta_r^{-1}\lambda_f) &= (\eta_l'\rho_h,\eta_r'^{-1}\lambda_k),\end{aligned}$$

其中$i=\delta^{-1}(geg), j=\alpha(ege), h=\delta^{-1}(geg), k=\beta(ege), \eta\in W_{i,j}, \eta'\in W_{h,k}$.因此有

$$(\eta_l\rho_i,\eta_r^{-1}\lambda_j)\mathscr{H}^{W_B}(\eta_l'\rho_h,\eta_r'^{-1}\lambda_k).$$

由定理3.4.6即得$j\mathscr{L}^Bk$,所以

$$\alpha(x)=\alpha(ege)\mathscr{L}^B\beta(ege)=\beta(x).$$

(3)$\Longrightarrow$(2) 设S是纯整半群且$E(S)\simeq B$, $a,b,c\in S$且$a\mathscr{H}b$.则存在$a'\in V(a)$, $b'\in V(b)$,使得$a'a=b'b, aa'=bb'$.

为了方便,我们不妨设$E(S)=B$.显然$ca\mathscr{R}^Scb$.下面只需证明$ca\mathscr{L}^Scb$,于是就有$ca\mathscr{H}^Scb$.

如下定义映射$\alpha,\beta: aa'Baa'\longrightarrow a'aBa'a$:

$$\alpha(h)=a'ha,\quad \beta(h)=b'hb,\quad \forall h\in aa'Baa'.$$

显然α,β都是从$aa'Baa'$到$a'aBa'a$的同构,从而$(aa',a'a)\in\mathscr{U}$, $\alpha,\beta\in W_{aa',a'a}$.取$c'\in V(c)$,则$a'c'\in V(ca)$.由定理3.4.7中条件(3)知有

$$\alpha(aa'c'caa')\mathscr{L}^B\beta(aa'c'caa'),$$

从而有

$$\alpha(aa'c'caa')\mathscr{L}^S\beta(aa'c'caa').$$

于是我们得到:

$$\begin{aligned} ca\mathscr{L}^S a'c'ca &= a'aa'c'caa'a \\ &= \alpha(aa'c'caa')\mathscr{L}^S\beta(aa'c'caa') \\ &= \beta(bb'c'cbb') = b'bb'c'cbb'b \\ &= b'c'cb\mathscr{L}^S cb. \end{aligned}$$

□

称带B是刚性的,如果对于任意$(e,f)\in\mathscr{U}$, $|W_{e,f}|=1$.

引理 3.4.8　带B是刚性的,当且仅当对任意$e\in B$, eBe只有一个自同构.

证明　必要性是显然的.下证充分性.

设对任意$e\in B$, eBe只有一个自同构.再设$(e,f)\in\mathscr{U}$, $\alpha,\beta\in W_{e,f}$且$\alpha\neq\beta$.则$\alpha,\beta: eBe\longrightarrow fBf$是同构,所以$\beta^{-1}\alpha$是$eBe$的自同构.显然$\beta^{-1}\alpha\neq 1$,所以$eBe$至少有两个自同构.矛盾. □

命题 3.4.9　设S是纯整半群,其幂等元带是左零半群的链, 且此链是刚性的,则$\mathscr{H}$是S上的左同余.

证明　设S的幂等元带$B=\dot{\cup}_{\delta\in\Gamma}E_\delta$,其中$\Gamma$是链,且对任意$\delta\in\Gamma$, E_δ 是左零半群,若$\delta\leqslant\delta'$,则$E_\delta E_{\delta'}\subseteq E_\delta\supseteq E_{\delta'}E_\delta$.设$x,y\in B$,且$x\mathscr{L}^B y$,则$x=xy$, $y=yx$.所以容易证明x和y在同一个E_δ 中.反过来,因为E_δ 是左零半群,所以对任意$x,y\in E_\delta$ 都有$x\mathscr{L}^B y$. 这说明每个E_δ 都是$\mathscr{L}^B$-类.

设$e,f\in B$, $\alpha,\beta: eBe\longrightarrow fBf$是同构, $x\in eBe$.由定理3.4.7知,我们只需证明$\alpha(x)\mathscr{L}^B\beta(x)$.

设$e\in E_\delta$, $f\in E_{\delta'}$.如下定义映射$\overline{\alpha}:\delta\Gamma\longrightarrow\delta'\Gamma$: 对任意$\mu\in\delta\Gamma$,如果存在$x\in E_\mu\cap eBe$,使得$\alpha(x)\in E_\xi$,则规定$\overline{\alpha}(\mu)=\xi$.设$x,y\in E_\mu\cap eBe$,使得$\alpha(x)\in E_\xi$, $\alpha(y)\in E_{\xi'}$.因为E_μ是左零半群,所以$\alpha(x)=\alpha(xy)=\alpha(x)\alpha(y)\in E_\xi E_{\xi'}$,因此$\xi\leqslant\xi'$.同理可证$\xi'\leqslant\xi$.所以$\xi=\xi'$.又因为$\alpha(x)\in fBf$,所以$f\alpha(x)=\alpha(x)$.由此即可得到$\xi=\delta'\xi\in\delta'\Gamma$.这就证明了$\overline{\alpha}$是映射.设$\mu,\mu'\in\delta\Gamma$,存在$x\in E_\mu\cap eBe$, $x'\in E_{\mu'}\cap eBe$,使得$\alpha(x)\in E_\xi$, $\alpha(x')\in E_{\xi'}$,则$xx'\in E_{\mu\mu'}\cap eBe$, $\alpha(xx')=\alpha(x)\alpha(x')\in E_{\xi\xi'}$.这说明$\overline{\alpha}(\mu\mu')=\overline{\alpha}(\mu)\overline{\alpha}(\mu')$,所以$\overline{\alpha}$是同态.对于如上的$\mu,\mu',x$,

x',如果$\alpha(x),\alpha(x')\in E_\xi$,那么$\alpha(x)\mathscr{L}^B\alpha(x')$.因为$\alpha$是同构,所以$x\mathscr{L}^Bx'$,因此$\mu=\mu'$.这说明$\overline{\alpha}$是单同态.对任意$\xi\in\delta'\Gamma$,$E_\xi\cap fBf\neq\emptyset$,所以易证$\overline{\alpha}$是满同态.总之我们证明了$\overline{\alpha}$是同构.

同理,定义$\overline{\beta}:\delta\Gamma\longrightarrow\delta'\Gamma$,同样的证明可知$\overline{\beta}$也是同构.因为$\Gamma$是刚性的,所以$\overline{\alpha}=\overline{\beta}$.对于$x\in eBe$,存在$\mu\leqslant\delta$,使得$x\in E_\mu\cap eBe$.因为$\overline{\alpha}(\mu)=\overline{\beta}(\mu)$,所以存在$\xi\in\delta'\Gamma$,使得$\alpha(x),\beta(x)\in E_\xi$.所以$\alpha(x)\mathscr{L}^B\beta(x)$. □

现在我们就可以给出完全左内射幺半群的一个重要性质.

定理 3.4.10 设S的任意左理想都可由幂等元生成(如S是完全左内射幺半群),则$\mathscr{H}$是S上的左同余.

证明 由命题3.4.5知 S 是纯整幺半群, 且$E(S)$是左零半群的对偶良序链.设$E(S)=\dot{\cup}_{\delta\in\Gamma}E_\delta$,其中$E_\delta$是左零半群, Γ是对偶良序链.由命题3.4.9知我们只需证明Γ是刚性的即可.

设$\delta\in\Gamma$, α是$\delta\Gamma$上的自同构.显然$\alpha(\delta)=\delta$.作集合

$$Y=\{\mu\in\delta\Gamma|\alpha(\mu)\neq\mu\}.$$

设$Y\neq\emptyset$.因为Γ是对偶良序链,所以Y中有最大元,设其为μ_0.对任意$\mu\in\delta\Gamma$,若$\mu>\mu_0$,则$\alpha(\mu)=\mu$.考虑$\alpha(\mu_0)\in\delta\Gamma$.若$\alpha(\mu_0)>\mu_0$,则$\alpha(\alpha(\mu_0))=\alpha(\mu_0)$,所以$\alpha(\mu_0)=\mu_0$, 矛盾.因此$\alpha(\mu_0)<\mu_0$.对任意$\xi\in\delta\Gamma$,若$\xi>\mu_0$,则$\alpha(\xi)=\xi$;若$\xi\leqslant\mu_0$,则$\alpha(\xi)\leqslant\alpha(\mu_0)<\mu_0$.因此$\mu_0\in\delta\Gamma$没有原像.矛盾.

矛盾说明$Y=\emptyset$,即α为$\delta\Gamma$上的单位自同构.所以由引理3.4.8知Γ是刚性的. □

为了给出完全左内射幺半群的"元素-理想"特征,我们还需要以下准备.

设S的任意有限生成左理想均可由幂等元生成.再设L是S的左理想.如下定义S上的关系σ_L:

$$a\sigma_Lb\Longleftrightarrow a=b\in L,\ 或\ a,b\in S-L$$
$$且存在幂等元\ f\in S-L\ 使得\ af=bf.$$

记τ_L为σ_L的传递包.

引理 3.4.11 τ_L是S上的左同余.

证明 设$L=Se,e\in E(S)$.显然σ_L是自反的,对称的.所以我们只需证明σ_L是左可乘的即可.设$a,b,c\in S$且$a\sigma_Lb$.则$a=b\in L$或$a,b\in S-L$且存在幂等元$f\in S-L$使得$af=bf$.若$a=b\in L$,则$ca=cb\in L$,所以$ca\sigma_Lcb$.设后者成立.因为$f\notin L$,所以$Se\subseteq Sf$,从而$e=ef$.设$ca\in L$,则$cbf=caf=caef=cae\in L$.假设$cb\notin L$,则$cb\neq cbf$,因此$cb\notin Sf$,从而$Sf\subseteq Scb=S(cb)'cb$,这里$(cb)'\in V(cb)$.所以$f=f(cb)'cb$,从而$f=f^2=f(cb)'cbf\in L$,矛盾.因此$cb\in L$.同理,若$cb\in L$,则$ca\in L$.

设$ca, cb \in L$,则$ca = cae = caef = caf = cbf = cbef = cbe = cb$,从而$ca\sigma_L cb$.

设$ca, cb \notin L$,则$caf = cbf$,因此$ca\sigma_L cb$. □

命题 3.4.12 设S是完全左内射幺半群,L是S的左理想.则存在幂等元e使得$L = Se$,且e和$S - L$中的所有幂等元都可交换.

证明 由引理3.4.11知τ_L是S上的左同余,所以由推论3.3.11知存在$x \in L$,使得对任意$y \in L$,有$yx\tau_L y$,且$s\tau_L t \Longrightarrow sx\tau_L tx$.因此对任意$y \in L, yx = y$,从而$x^2 = x, L = Sx$.设$f \in (S-L)\cap E(S)$, 则由$ff = 1f$得知$f\tau_L 1$,所以$fx\tau_L x$.但$x$, $fx \in L$,所以$x = fx$.又因为$Sx = L \subseteq Sf$,所以$x = xf$,从而$xf = fx$. □

引理 3.4.13 设S的任意有限生成左理想均可由幂等元生成, $e \in E(S), a, b \in S - Se$. 则对于任意$a' \in V(a), b' \in V(b)$,有

(1) $ea'\mathscr{R}e$;

(2) $ae\mathscr{L}e$;

(3) $ae\mathscr{R}be \Longleftrightarrow aea' = beb'$;

(4) $ea'\mathscr{L}eb' \Longleftrightarrow ea'\mathscr{H}eb'$.

证明 (1) 因为$aa'a = a \notin Se$,所以$Se \subseteq Sa'a$, 从而$e = ea'a$.所以$ea'\mathscr{R}e$.

(2) 因为$a \notin Se$,所以$Se \subseteq Sa$,因此$Se = Se^2 \subseteq Sae \subseteq Se$,从而$Se = Sae$,即$ae\mathscr{L}e$.

(3) 由命题3.4.3知S是纯整半群,所以$aea', beb' \in E(S)$.由于$ea' \in V(ae)$,所以$aea' = (ae)(ea') = (ae)(ae)'\mathscr{R}ae$,同理$beb'\mathscr{R}be$. 因此由命题3.4.3(2) 即得: $aea' = beb' \Longleftrightarrow aea'\mathscr{R}beb' \Longleftrightarrow ae\mathscr{R}be$.

(4) 由(1)得$ea'\mathscr{R}e\mathscr{R}eb'$, 所以$ea'\mathscr{L}eb' \Longleftrightarrow ea'\mathscr{H}eb'$. □

设L是S的左理想, $a \in S - L$.记

$$L_a = \{c \in S | ca \in L\},$$

则L_a是S的左理想.

引理 3.4.14 设S的任意左理想均可由幂等元生成, $L = Se, a \in S-L, a' \in V(a)$,则$L_a = Saea'$.如果$e$和$S - L$中的所有幂等元都可交换,那么$aea'\mathscr{L}ea'$,且对任意$a, b \in S - L$,下述三条是等价的:

(1) $L_a = L_b$;

(2) 对任意$a' \in V(a), b' \in V(b), ea'\mathscr{L}eb'$;

(3) 对任意$a' \in V(a), b' \in V(b), ea'\mathscr{H}eb'$.

证明 和引理3.4.13的证明类似地可知$e = ea'a$,所以$aea'a = ae \in L$,因此$aea' \in L_a$.设$L_a = Sf, f^2 = f \in S$.因为$aa'a = a \in S - L$,所以$aa' \notin L_a$,因

此$Sf \subseteq Saa'$,从而$f = faa'$.由$f \in L_a$ 知$fa \in L$,所以$faea' = faa' = f$,从而$Sf \subseteq Saea'$.这就证明了$L_a = Saea'$.

设e和$S - L$中所有幂等元都可交换.则$ea'a = e = a'ae$,所以$ea' = ea'aa' = a'aea' \in Saea' \subseteq Sea'$,从而$ea'\mathscr{L}aea'$.

对于题设中所给的a, b,由引理3.4.13(1)知$ea'\mathscr{R}e\mathscr{R}eb'$.所以, $ea'\mathscr{H}eb' \Longleftrightarrow ea'\mathscr{L}eb' \Longleftrightarrow aea'\mathscr{L}beb' \Longleftrightarrow Saea' = Sbeb' \Longleftrightarrow L_a = L_b$. □

引理 3.4.15 设S的任意左理想均可由幂等元生成, L是S的左理想,则.

(1) 设σ是S上的左同余且使得L是σ-类的并. 如果$a, b \in S - L$, 使得$a\sigma b$,那么$L_a = L_b$;

(2) 设$L = Se$,这里$e \in E(S)$和$S-L$中的所有幂等元都可交换.如下定义S上的关系λ_L:

$$a\lambda_L b \Longleftrightarrow a, b \in S - L, L_a = L_b, \text{ 或} a, b \in L, \ a\mathscr{R}b,$$

则λ_L是S上的左同余.

证明 (1) 设$c \in L_a$,则$ca \in L$.由$a\sigma b$得$ca\sigma cb$,所以$cb \in L$,即$c \in L_b$.所以$L_a \subseteq L_b$.同理可证$L_b \subseteq L_a$.

(2)显然λ_L是S上的等价关系.设$a, b, c \in S, a\lambda_L b$.则$a, b \in S - L, L_a = L_b$,或$a, b \in L, a\mathscr{R}b$.若后一种情形出现,则有$ca, cb \in L, ca\mathscr{R}cb$,从而$ca\lambda_L cb$.设$a, b \in S - L, L_a = L_b$.显然, $aa' \notin L_a$. 设$c \in L_a$,则$c \in L_a \subseteq Saa'$,因此$c = caa'$.所以$cS = caa'S = caS$,因此$ca\mathscr{R}c$.同理$c\mathscr{R}cb$.所以$ca\mathscr{R}cb$,且$ca, cb \in L$,从而$ca\lambda_L cb$.下设$c \notin L_a$.此时$ca, cb \notin L$.我们只需证明$L_{ca} = L_{cb}$即可.因为$L_a = L_b$,所以由引理3.4.14知对任意$a' \in V(a), b' \in V(b)$,有$ea'\mathscr{L}eb'$,从而对任意$c' \in V(c)$, 有$ea'c'\mathscr{L}eb'c'$.而$a'c' \in V(ca), b'c' \in V(cb)$,所以再由引理3.4.14得$L_{ca} = L_{cb}$. □

由§3.3的结果容易证明如下的定理.

定理 3.4.16 对于幺半群,以下两条是等价的:

(1) S是完全左内射幺半群;

(2) S含有零元,且对任意左同余λ,任意左理想I,若I是λ-类的并,则存在$w \in I$使得对任意$s \in I, s\lambda sw$,且对任意$s, t \in S, s\lambda t \Longrightarrow sw\lambda tw$.

证明 我们只需证明(2)$\Longrightarrow$(1).

设λ是S上的左同余,J是S的左理想.对任意$a \in J$,记J_a为a所在的λ-类.令

$$I = \cup_{a\in J} J_a.$$

设$s \in S, x \in J_a$.则$sx\lambda sa$,所以$sx \in J_{sa} \subseteq I$,即$I$是$S$的左理想,且$I$是$\lambda$-类的并.由(2)知存在$w \in I$使得对任意$s \in I, s\lambda sw$,且对任意$s, t \in S, s\lambda t \Longrightarrow sw\lambda tw$.

设$w \in J_a, a \in J$,则$w\lambda a$.所以对任意$s \in J$, $sa\lambda sw\lambda s$,且对任意$s,t \in S$,若$s\lambda t$,则$sa\lambda sw\lambda tw\lambda ta$.所以由§3.3的结果知$S$是完全左内射幺半群. □

现在就可以给出本节的主要结果–完全左内射幺半群的"元素-理想"特征.

定理 3.4.17 设S是幺半群.则以下条件是等价的:

(1) S是完全左内射幺半群;

(2) S含有零元;对S的任意左理想I,存在$e \in E(S)$,使得$I = Se$,且对任意$a,b \in S-I$,若$I_a = I_b$,则$aea' = beb'$,这里$a' \in V(a), b' \in V(b)$.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 设S是完全左内射幺半群.由定理3.4.16知S含有零元.设I是S的左理想.由命题3.4.12知存在幂等元g使得$I = Sg$,且g和$S-I$中的所有幂等元都可交换.所以引理3.4.15 中定义的关系λ_I是S上的左同余.显然I是λ_I-类的并.所以由定理3.4.16知存在$x \in I$,使得对任意$y \in I, yx\lambda_I y$,且对任意$a,b \in S, a\lambda_I b \Longrightarrow ax\lambda_I bx$.即对任意$y \in I, y\mathscr{R}yx$,且对任意$a,b \in S-I$,若$I_a = I_b$,则$ax\mathscr{R}bx$.对任意$x' \in V(x), xx'\mathscr{R}x$,所以对任意$y \in I, y\mathscr{R}yxx'$,且对任意$a,b \in S-I$,若$I_a = I_b$,则$axx'\mathscr{R}bxx'$.由命题3.4.3(2)知$xx't$和$x' \in V(x)$的选取无关.

设$xx' \in I$.记$e = xx'$.因为$I = Sg$,所以$e = eg$.由前面的讨论可知$g\mathscr{R}ge$,所以由命题3.4.3知$g = ge$.因此$I = Sg = Se$.对任意$a,b \in S-I$,若$I_a = I_b$,则$ae\mathscr{R}be$,从而由$aea' = (ae)(ea')\mathscr{R}ae$, $beb' = (be)(eb')\mathscr{R}be$知$aea'\mathscr{R}beb'$.但$aea', beb' \in E(S)$,所以$aea' = beb'$.

下设$xx' \notin I$.记$f = xx'$.对任意幂等元h,显然有$f = fh$或$h = hf$.设$h \in S-I$.类似于引理3.4.11的证明可知$I_h = I_1$.所以有$hf\mathscr{R}1f = f$,因此$hf = f$.这说明f和$S-I$中的所有幂等元都可交换.所以对任意$h \in S-I$,都有$Sf \subseteq Sh$,且具有如此性质的f还是唯一的.

因为$Sf \not\subseteq I$,所以$I \subseteq Sf$.设$a,b \in Sf-I$,则$a'a, b'b \in Sf-I(a,b \in S-I)$,这里$a' \in V(a), b' \in V(b)$.由$f$的唯一性可知有$a'a = f' = b'b$.又$a = af, b = bf$,所以$Sa = Sf = Sb$,即$a\mathscr{L}b$.如果$I_a = I_b$,那么$a = af\mathscr{R}bf = b$.因此$a\mathscr{H}b$.

由定理3.4.10知$\mathscr{H}$是S上的左同余,显然I还是$\mathscr{H}$-类的并.所以由定理3.4.16知存在$x_1 \in I$,使得对任意$y \in I, y\mathscr{H}yx_1$,且对任意$a,b \in S, a\mathscr{H}b \Longrightarrow ax_1\mathscr{H}bx_1$.特别地,$x_1\mathscr{H}x_1^2$,所以$x_1$所在的$\mathscr{H}$-类$H_{x_1}$是群.记这个群的单位元为$e_1$.容易证明对任意$y \in I$,有$y\mathscr{H}ye_1$,且对任意$a,b \in S$, $a\mathscr{H}b \Longrightarrow ae_1\mathscr{H}ax_1\mathscr{H}bx_1\mathscr{H}be_1$.

设$a,b \in S-I$使得$I_a = I_b$.由引理3.4.14知$Saga' = Sbgb'$,即$aga'\mathscr{L}bgb'$,这里$a' \in V(a), b' \in V(b)$.若$af \in I$,则$a'af \in I$.又$a'a \notin I$,而f和$S-I$中的所有幂等元都可交换,所以$a'af = fa'a = f$,因此$f \in I$.矛盾.矛盾说明$af \notin I$.同理$bf \notin I$.

由$I = Sg \subseteq Sf$知$g = gf$.所以$afgfa' = aga'$,从而$(af)g(af)' = aga'$,这里$(af)' \in V(af)$.同理有$(bf)g(bf)' = bgb'$.所以$(af)g(af)'\mathscr{L}(bf)g(bf)'$.由引理3.4.14即得: $I_{af} = I_{bf}$.又$af, bf \in Sf - I$,所以由前面已证的结果即得$af\mathscr{H}bf$.所以$afe_1\mathscr{H}bfe_1$.

令$e = fe_1$.则$e\mathscr{L}e_1$.因为$e_1 \in I = Sg$,所以$e_1 = e_1g$.又由$g \in I$得$g\mathscr{H}ge_1$,所以$g = ge_1$.因此$I = Sg = Se_1 = Se$.对任意$a, b \in S - I$,若$I_a = I_b$,则前面已证明了$ae\mathscr{H}be$,从而$ae\mathscr{R}be$.所以$aea' = (ae)(ea')\mathscr{R}ae\mathscr{R}be\mathscr{R}(be)(eb') = beb'$.再由命题3.4.3即得$aea' = beb'$.

(2)$\Longrightarrow$(1) 设I是S的左理想, λ是S上的左同余使得I是λ-类的并. 由(2)得知$I = Se$, e是满足条件(2)的幂等元.对任意$y \in I, ye = y$,所以有$ye\lambda y$.设$a, b \in S$使得$a\lambda b$. 若a, $b \in I$, 则$ae = a\lambda b = be$. 因此设a, $b \in S-I$.由引理3.4.15知$I_a = I_b$.所以由(2)知对任意$a' \in V(a), b' \in V(b)$, 有$aea' = beb'$.因此由$a\lambda b$得$aea'a\lambda beb'b$.显然有$a'a, b'b \in S - I$,所以$I \subseteq Sa'a, I \subseteq Sb'b$,从而$e = ea'a = eb'b$.因此我们得到$ae\lambda be$.这就证明了$S$满足定理3.4.16的条件(2).所以$S$是完全左内射幺半群. □

推论 3.4.18 设S的幂等元都是中心元,则以下两条等价:

(1) S是完全左内射幺半群;

(2) S的任意左理想都可由幂等元生成,且S含有零元.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 由命题3.4.12即得.

(2)$\Longrightarrow$(1) 设I是S的左理想,λ是S的左同余,由(2)知$I = Se, e^2 = e \in S$.所以对任意$y \in I, y = ye$,故$y\lambda ye$.对任意$a, b \in S$,若$a\lambda b$,则$ae = ea\lambda eb = be$.由定理3.4.16即知S是完全左内射幺半群. □

§3.5 Bruck-Reilly扩张

由定理2.2.2知完全左投射幺半群只有一个: $\{1\}$.而§3.4的结果告诉我们,完全左内射幺半群则有很多.设S是完全左内射幺半群, T是S的Bruck-Reilly扩张.我们要证明T^0也是完全左内射幺半群.因此任意完全左内射幺半群可嵌入到单半群和0的不交并T^0中,且T^0仍是完全左内射幺半群.本节的内容主要选自于Fountain的文章[82].

设S是幺半群,记H_1为1所在的$\mathscr{H}$-类.设θ是从S到H_1的同态,$N = \{0, 1, 2, \cdots\}$.在集合$N \times S \times N$中定义乘法如下:

$$(m, a, n) \cdot (p, b, q) = (m - n + t, \theta^{t-n}(a)\theta^{t-p}(b), q - p + t),$$

这里$t = \max(n, p)$, θ^0是S上的单位同态.可以证明, $(N \times S \times N, \cdot)$是幺半群,其幺元为$(0, 1, 0)$.这个半群叫做由$\theta$决定的$S$ 的Bruck-Reilly扩张,记为$BR(S, \theta)$.下面的定理给出$BR(S, \theta)$的主要性质,其证明可见Howie [115]的文章.

定理 3.5.1 设S是幺半群, $T = BR(S,\theta)$.则有:

(1) T是单半群, $(0,1,0)$是T的单位元;

(2) $(m,a,n) \in E(T) \Longleftrightarrow m = n, a \in E(S)$;

(3) $(m,a,n)\mathscr{R}^T(p,b,q) \Longleftrightarrow m = p, a\mathscr{R}^S b$, $(m,a,n)\mathscr{L}^T(p,b,q) \Longleftrightarrow n = q, a\mathscr{L}^S b$.

(4) T是逆半群当且仅当S是逆半群.

下面是本节的主要定理.

定理 3.5.2 设S是完全左内射幺半群, $T = BR(S,\theta)$.则T^0 也是完全左内射幺半群.

证明 设K是T的左理想, n是集合

$$\{n|n \in N, \text{存在}a \in S, m \in N, \text{使得}(m,a,n) \in K\}$$

中的最小者.记

$$I = \{x \in S|\text{存在}p \in N\text{使得}(p,x,n) \in K\}.$$

容易证明I是S的左理想.因为S是完全左内射幺半群,所以由定理3.4.17知存在$e \in E(S)$,使得$I = Se$,且对任意$a,b \in S - I$,若$I_a = I_b$,则$aea' = beb'$,这里$a' \in V(a), b' \in V(b)$.设$(p,e,n) \in K$,则$(n,e,n) = (n,e,p)(p,e,n) \in K$.所以$T(n,e,n) \subseteq K$.反过来设$(m,a,q) \in K$,则$q \geqslant n$.所以

$$(m,a,q)(n,e,n) = (m, a\theta^{q-n}(e), q).$$

如果$q = n$,则$\theta^{q-n}(e) = e$,且$a \in I$,所以$a\theta^{q-n}(e) = ae = a$.如果$q > n$,则$\theta^{q-n}(e) = 1$,所以$a\theta^{q-n}(e) = a$.总之我们有$(m,a,q)(n,e,n) = (m,a,q)$,所以$(m,a,q) \in T(n,e,n)$.因此$K = T(n,e,n)$.由定理3.5.1知$(n,e,n) \in E(T)$.

设$(k,a,q),(h,b,p) \in T - K$.由上面的证明过程可知$q \leqslant n, p \leqslant n$.设$a' \in V(a), b' \in V(b)$, 则容易证明$(q,a',k) \in V(k,a,q), (p,b',h) \in V(h,b,p)$.记

$$\begin{aligned}
x &= (k,a,q)(n,e,n)(q,a',k) \\
&= (k-q+n, \theta^{n-q}(a)e\theta^{n-q}(a'), k-q+n), \\
y &= (h,b,p)(n,e,n)(p,b',h) \\
&= (h-p+n, \theta^{n-p}(b)e\theta^{n-p}(b'), h-p+n).
\end{aligned}$$

设$K_{(k,a,q)} = K_{(h,b,p)}$.我们要证明$x = y$.

由前面的证明已知T的任意左理想都可由幂等元生成.所以$x\mathscr{L}^T y$,从而由定理3.5.1知有

$$k-q+n=h-p+n,$$
$$\theta^{n-q}(a)e\theta^{n-q}(a')\mathscr{L}^S\theta^{n-p}(b)e\theta^{n-p}(b').$$

显然,$\theta^{n-q}(a')\in V(\theta^{n-q}(a)),\theta^{n-p}(b')\in V(\theta^{n-p}(b))$.如果$I=S$,则$e=1$,并且$q<n,p<n$.所以

$$x=(k-q+n,1,k-q+n)=y,$$

这里用到了$\theta^{n-q}(a)\theta^{n-q}(a')=1=\theta^{n-p}(b)\theta^{n-p}(b')$.如果$I\neq S$,则$H_1\cap I=\varnothing$(因为$H_1$是群).因此当$q<n$时, $\theta^{n-q}(a)\notin I$.当$q=n$时, $\theta^{n-q}(a)=a$.若$a\in I$, 则存在$p\in N$, 使得$(p,a,n)\in K$.因此

$$(k,a,n)=(k,1,p)(p,a,n)\in K,$$

即$(k,a,q)\in K$,矛盾.所以$a\notin I$.这样就有$\theta^{n-q}(a)\notin I$.同理$\theta^{n-p}(b)\notin I$.因为S是完全左内射幺半群,所以由定理3.4.17即得:

$$\theta^{n-q}(a)e\theta^{n-q}(a')=\theta^{n-p}(b)e\theta^{n-p}(b').$$

因此$x=y$. 设K是T^0的左理想,容易证明存在$e\in E(T^0)$,使得$K=T^0e$,且对任意$a,b\in T^0-K$,若$K_a=K_b$,则$aea'=beb'$.又T^0有零元,所以由定理3.4.17知T^0是完全左内射幺半群. □

因为$T=BR(S,\theta)$是单半群,所以定理3.5.2说明任意完全左内射幺半群可嵌入到单半群和0 的不交并T^0中,并且T^0仍是完全左内射幺半群.

由§3.4的讨论可知完全左内射幺半群一定是纯整半群.借助于Bruck-Reilly扩张,下面我们给出一个完全左内射幺半群S的例子,使得S既不是逆半群,也不是群并.

例 3.5.3 设E是左零半群, G,H是两个不同但同构的群.设$\phi:G\longrightarrow H$是同构, 1是G的单位元, 1_H是H的单位元.令$A=G\dot{\cup}(H\times E)$.规定A上的乘法运算为:

$$g(h,e)=(\phi(g)h,e),$$
$$(h,e)g=(h\phi(g),e),$$
$$\forall g\in G,\forall(h,e)\in H\times E,$$

A上其他元素的运算按照原来的定义.则A是一个幺半群,1为其幺元.容易证明A还是纯整的群并,其幂等元带为$\{1\}\cup(\{1_H\}\times E)$.显然$A$的单位元所在的$\mathscr{H}$-类为$G$. A的左理想只有如下两个:

$$A=A1,\quad H\times E=A(1_H,e),$$

其中e是E中的任意元.简单的计算可知$(1_H,e)$和$A-A(1_H,e)$中的所有元素都可交换,所以对任意$a,b\in A-A(1_H,e)=G$,

$$\begin{aligned}a(1_H,e)a^{-1} &= (1_H,e)aa^{-1}=(1_H,e)\\ &= (1_H,e)bb^{-1}=b(1_H,e)b^{-1}.\end{aligned}$$

设ψ是G的自同态.如下定义A的自同态θ:

$$\begin{aligned}&\theta(h,e)=\psi\phi^{-1}(h),\quad \forall(h,e)\in H\times E,\\ &\theta(g)=\psi(g),\quad \forall g\in G.\end{aligned}$$

则$\theta(A)\subseteq G$.根据乘法的定义容易证明θ是同态.例如,$\theta(g(h,e))=\theta(\phi(g)h,e)=\psi\phi^{-1}(\phi(g)h)=\psi(g\phi^{-1}(h))=\psi(g)\psi\phi^{-1}(h)=\theta(g)\theta(h,e)$.作Bruck-Reilly扩张$S=BR(A,\theta)$. 类似于定理3.5.2的证明可知$S^0$是完全左内射幺半群.由定理3.5.1知$S^0$不是逆半群.又$S^0$ 也不是群并.否则S是群并,从而S是完全单半群(单的群并是完全单的),所以S满足主左理想和主右理想的降链条件.这和$S=BR(A,\theta)$矛盾.

设S是完全左内射幺半群.下面要证明,和S相关的某些幺半群也是完全左内射的.

定理 3.5.4 设S,T是幺半群,$\phi:S\longrightarrow T$是同态满射且$\phi(1_S)=1_T$. 如果S是完全左内射的,那么T也是完全左内射的.

证明 设M,A,B都是左T-系,且A是B的T-子系, $\alpha:A\longrightarrow M$是$T$-同态.对任意$x\in M$,任意$s\in S$,规定$s*x=\phi(s)x$,则$M$是左$S$ -系.同理, A,B也可作成S -系,且α还是S -同态. 由于M是内射S -系,所以存在S -同态$\beta:B\longrightarrow M$,使得$\beta|_A=\alpha$.对任意$b\in B$,任意$t\in T$,存在$s\in S$, 使得$\phi(s)=t$,所以$\beta(tb)=\beta(\phi(s)b)=\beta(s*b)=s*\beta(b)=\phi(s)\beta(b)=t\beta(b)$,因此$\beta$ 也是T-同态.这就证明了M是内射T-系.所以T是完全左内射幺半群. □

命题 3.5.5 设T是幺半群S的正则子半群.如果S的任意左理想都可由幂等元生成,那么T的任意左理想也可由幂等元生成.

证明 由命题3.4.5知S是纯整幺半群,且其幂等元带B是左零半群$E_\gamma(\gamma\in\Gamma)$的对偶良序链.所以$T$的幂等元带$B\cap T$也是左零半群$E_\gamma\cap T$的对偶良序链,由命题3.4.5即知$T$的任意左理想均可由幂等元生成. □

定理 3.5.6 设S是完全左内射幺半群, T是S的正则子半群. 对任意$e, f \in E(S)$,若$e \leqslant f$(即$ef = fe = e$)且$f \in T$能推出$e \in T$,则T^1是完全左内射幺半群.

证明 设$f \in T$是幂等元,则由$0 \leqslant f$即知$0 \in T$.由命题3.5.5知T 的任意左理想均可由幂等元生成.设I是T的真左理想,则$I = Te_1, T = Tf$,这里$e_1, f \in E(T)$.由定理3.4.17知存在$e \in E(S)$ 使得$L = Se_1 = Se$,且对任意$a, b \in S - Se$,若$L_a = L_b$,则$aea' = beb'$.若$1 \in L$,则$L = Se_1 = S$,所以$T = Te_1 = I$,与I是T的真左理想矛盾.所以$1 \notin L$.设$g^2 = g \in S - L$.和引理3.4.11的证明类似地可以证明$L_g = L_1$.又$g \in V(g), 1 \in V(1)$,所以$geg = 1e1$,即$e = geg$,从而$e = ge = eg$.这说明e和$S - L$中的所有幂等元都可交换.若$f \in L$,则$T = Tf \subseteq L = Se_1$,所以$T = I$,又是矛盾.因此$f \notin L$.所以$ef = fe = e$.由条件即知$e \in T$,所以$I = Te$.设$a, b \in T - I$,且满足$I_a = I_b$.则$aea' \mathscr{L}^T beb'$,这里$a' \in V(a) \cap T, b' \in V(b) \cap T$.所以由命题3.4.3知对任意$a' \in V(a)$,任意$b' \in V(b)$, $aea' \mathscr{L}^S beb'$.因为$I = Te = T \cap Se$, 所以$a, b \in S - L$.由定理3.4.17即知$aea' = beb'$.所以再由定理3.4.17容易证明T^1是完全左内射幺半群. □

由定理3.5.6即可得如下推论.

推论 3.5.7 设S是完全左内射幺半群, I是S的理想.则I^1 是完全左内射幺半群.

证明 设$x \in I, x' \in V(x)$,则$x' = x'xx' \in I$,即I是S的正则子半群.所以由定理3.5.6即得结论. □

推论 3.5.8 设S是完全左内射幺半群, $e \in E(S)$,则eSe是完全左内射的.

证明 由定理3.5.6容易证明. □

§3.6 完全内射幺半群

设S是幺半群.称S是完全内射幺半群,如果S既是完全左内射的,又是完全右内射的.

引理 3.6.1 设S的任意左、右理想都可由幂等元生成, $e, f \in E(S)$.则$Se \subseteq Sf$当且仅当$eS \subseteq fS$.特别地, $Se = Sf$当且仅当$eS = fS$.

证明 由引理3.4.2及其对偶即得结论. □

引理 3.6.2 设S的任意左、右理想都可由幂等元生成,则S 是逆半群,且$E(S)$是对偶良序链.

证明 显然S是正则的.设$e, f \in E(S)$,则有$Se \subseteq Sf$或$Sf \subseteq Se$.若$Se \subseteq Sf$,则由引理3.6.1知$eS \subseteq fS$,所以$e = ef = fe$.若$Sf \subseteq Se$,则同理可得$f = ef = fe$.所以S是逆半群且$E(S)$是链.

设 $\{e_i|i \in I\}$ 是 $E(S)$ 的非空子集. 左理想 $L = \cup_{i\in I}Se_i$ 可由幂等元 g 生成, 即$\cup_{i\in I}Se_i = Sg$.所以对任意$i \in I, Se_i \subseteq Sg$.由引理3.6.1知$e_iS \subseteq gS$.所以$e_i \leqslant g$.显然存在某个$i_0 \in I$, 使得$g = e_{i_0}$,即$e_{i_0}$是$\{e_i|i \in I\}$中的最大元. □

下面是完全内射幺半群的特征刻画.

定理 3.6.3 以下两条是等价的:

(1) S是完全内射幺半群;

(2) S含有零元,且其任意左、右理想均可由幂等元生成.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 由§3.5的结论即得.

(2)$\Longrightarrow$(1) 设M, N, A是左S -系, $M \leqslant N, f : M \longrightarrow A$是$S$ -同态.令

$$\mathscr{A} = \{(P,g)|M \leqslant P \leqslant N, g \in \text{Hom}_S(P,A), g|_M = f\}.$$

在A中规定偏序如下:

$$(P,g) \leqslant (P',g') \Longleftrightarrow P \leqslant P', \quad g'|_P = g.$$

显然$\mathscr{A} \neq \emptyset$且满足Zorn引理的条件. 所以由Zorn引理知$\mathscr{A}$中有极大元,设其为$(P_0, g_0)$. 下证$P_0 = N$.

反设$P_0 \neq N$.取$n \in N - P_0$.记$L = \{s \in S|sn \in P_0\}$.如果$L = \emptyset$,那么任意取定$a \in A$,定义$S$ -同态$h : Sn \longrightarrow A$如下: 对任意$x \in Sn, h(x) = 0a$.设$L \neq \emptyset$,则L是S的左理想. 由条件知$L = Se, e \in E(S)$. 因为$n \notin P_0$, 所以$e \neq 1$. 定义S -同态$\phi : L \longrightarrow A$为

$$\phi(s) = g_0(sn), \qquad \forall s \in L.$$

令$z = \phi(e)$,则对任意$s \in L$, $\phi(s) = \phi(se) = s\phi(e) = sz$,所以$g_0(sn) = sz$.

定义映射$h : Sn \longrightarrow A$如下:

$$h(sn) = sez, \qquad \forall\ s \in S.$$

首先说明h是有定义的: 设$s_1n = s_2n, s_1, s_2 \in S$,我们要证明$s_1ez = s_2ez$.由引理3.6.2知$S$是逆半群,所以$s_1en = s_1s_1^{-1}s_1en = s_1es_1^{-1}s_1n = s_1es_1^{-1}s_2n$.同理$s_2en = s_2es_2^{-1}s_1n$.因为$s_1e, s_2e \in L$,所以$s_1en, s_2en \in P_0$,因此$s_1es_1^{-1}s_2, s_2es_2^{-1}s_1 \in L$,从而$s_1es_1^{-1}s_2 = s_1es_1^{-1}s_2e, s_2es_2^{-1}s_1 = s_2es_2^{-1}s_1e$.所以,

$$\begin{aligned}
s_1en &= s_1es_1^{-1}s_2n = s_1es_1^{-1}s_2en = s_1es_1^{-1}(s_2en) \\
&= s_1es_1^{-1}s_2es_2^{-1}s_1n = (s_1es_1^{-1})(s_2es_2^{-1})s_1en \\
&= (s_2es_2^{-1})(s_1es_1^{-1})s_1en = (s_2es_2^{-1})s_1s_1^{-1}s_1en \\
&= s_2es_2^{-1}s_1en = s_2es_2^{-1}s_1n = s_2en,
\end{aligned}$$

从而$h(s_1n) = s_1ez = g_0(s_1en) = g_0(s_2en) = s_2ez = h(s_2n)$.这就证明了$h$是映射. 显然$h$还是$S$ -同态.对任意$x \in P_0 \cap Sn$,存在$s \in S$,使得$x = sn \in P_0$,所以$s \in L$,从而$se = s$.因此$h(x) = h(sn) = sez = sz = g_0(sn) = g_0(x)$.这说明$h$和$g_0$在$P_0 \cap Sn$上的作用是相同的.

令$P^* = P_0 \cup Sn, f^* : P^* \longrightarrow A$的定义如下：

$$\begin{aligned} f^*(x) &= g_0(x), \qquad \forall x \in P_0, \\ f^*(x) &= h(x), \qquad \forall\, x \in Sn. \end{aligned}$$

由上面的讨论可知f^*是S -同态.显然, $(P_0, g_0) < (P^*, f^*)$,这和(P_0, g_0)是$\mathscr{A}$的极大元矛盾.

矛盾说明, $P_0 = N$.因此A是内射S -系.同理可以证明任意右S -系也是内射的.所以S是完全内射幺半群. □

定理 3.6.4 幺半群S是完全内射的,当且仅当S是含0的逆半群,且$E(S)$是对偶良序链.

证明 由定理3.6.3、引理3:6.2和命题3.4.5即得此结论. □

下面给出一个是完全左内射但不是完全内射的幺半群的例子.

例 3.6.5 设T是右零半群,且$|T| \geqslant 2, S = T^{01}$.则由定理3.6.4知$S$不是完全内射的.容易证明$S$的左理想只有三个：$0, T^0, S$.设$\lambda$是$S$上的任意左同余.取$w \in T$,则对任意$x \in T^0, x = xw$, 从而$x\lambda xw$.设$s\lambda t$且$s, t \in T^0$,则$sw = s\lambda t = tw$.若存在$t_0 \in T$使得$t_0\lambda 1$,则我们还可以取$w = t_0$.对于这样取的$w$,若$t\lambda 1, t \in T_0$,则$tw = t\lambda 1\lambda w = 1 \cdot w$.所以由§3.3中的结果知$S$是完全左内射的.

命题 3.6.6 设S是完全内射幺半群, $e \in E(S)$.则eSe也是完全内射幺半群.

证明 由定理3.6.3我们只需证明eSe的任意左、右理想均可由幂等元生成即可.设L是eSe 的左理想,则容易证明$L = SL \cap eSe$.由条件可知$SL = Sf, f \in E(S)$.所以$L = Sf \cap eSe = Sf \cap Se \cap eS = Sfe \cap eS$.若$ef = e$,则$L = Se \cap eS = eSe$.若$ef = f$,则$f = efe \in eSe$,且$L = Sf \cap eS = (eSe)f$.总之,$L$可由幂等元生成.同理可证所有右理想也可由幂等元生成. □

命题 3.6.7 完全内射幺半群的任意理想也是完全内射幺半群.

证明 设H是S的理想.则$H = Se = eS, e \in E(S)$.所以$H = eS \cap Se = eSe$.于是由命题3.6.6即得结论. □

下面考虑完全内射幺半群的性质.先给出几个记号.

设K是幺半群S的子集合.定义S上的左同余$\lambda(K)$为：

$$a\lambda(K)b \Longleftrightarrow \text{对所有} k \in K, ak = bk.$$

同理可定义S上的右同余$\rho(K)$为：

$$a\rho(K)b \Longleftrightarrow 对所有k \in K, ka = kb.$$

设σ是S上的左同余.记

$$r(\sigma) = \{s \in S | 如果a\sigma b, 那么as = bs\}.$$

同样若σ是S上的右同余,则记

$$l(\sigma) = \{s \in S | 如果a\sigma b, 那么\ sa = sb\}.$$

显然$l(\sigma)$和$r(\sigma)$分别是S的左、右理想.

记$\mathscr{K} = \{Kerf | f : {}_SS \longrightarrow {}_SS是S\text{-}同态\}$.

命题 3.6.8　设S是完全内射幺半群, $e \in E(S)$.则$r(\lambda(eS)) = eS, l(\rho(Se)) = Se$.

证明　设$b \in r(\lambda(eS))$,则$\lambda(e) \subseteq \lambda(b)$.所以可以如下定义$S$-同态$f : Se \longrightarrow Sb$:

$$f(xe) = xb, \qquad \forall\, x \in S.$$

显然$b = f(e) = ef(e) \in eS$.所以$r(\lambda(eS)) \subseteq eS$. $eS \subseteq r(\lambda(eS))$又是显然的.所以$r(\lambda(eS)) = eS$.同理可证$l(\rho(Se)) = Se$. □

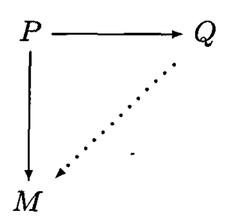
命题 3.6.9　设S是完全内射幺半群.则S的右理想格和格$\mathscr{K}$反同构.

证明　对S的任意右理想eS, $\lambda(eS) = \mathrm{Ker}h$,其中$h : {}_SS \longrightarrow {}_SS$ 的定义为：$h(x) = xe$.所以$\lambda(eS) \in \mathscr{K}$.反过来,设$h$:${}_SS \longrightarrow {}_SS$是$S$-同态. 则 $\mathrm{Ker}h = \lambda(h(1)S)$, 而$h(1)S$可以写成$eS(e \in E(S))$的形式. 如果$e_1S \subseteq e_2S$, 那么显然有$\lambda(e_1S) \supseteq \lambda(e_2S)$.所以由命题3.6.8易知映射$eS \mapsto \lambda(eS)$是从$S$的右理想格到$\mathscr{K}$的反同构. □

如果S-系${}_SS$是内射的,则称幺半群S是自内射的.关于自内射正则幺半群的研究结果可参看Shoji的系列论文.

§3.7 拟内射系

定义 3.7.1 设Q是S-系.称S-系M是Q-内射的,如果对任意S-单同态$P \longrightarrow Q$,任意同态$P \longrightarrow M$,存在同态$Q \longrightarrow M$使得下图可换:



显然S-系M是内射的当且仅当对于任意S-系Q, M是Q-内射的.

定义 3.7.2 称S-系M是拟内射的,如果M是M-内射的.

显然内射系一定是拟内射的.设幺半群S没有真左理想,即S是群,则S-系$_SS$是拟内射的.但当$|S| \geqslant 2$时,由命题3.1.6知$_SS$不是内射系.

本节中我们总是假定幺半群S含有零元$0 \neq 1$,且所考虑的S-系均为S^0-Act中的对象,即均为中心S-系.

和内射性、拟内射性的定义类似地可在S^0-Act中定义内射对象和拟内射对象.下面所说的内射系和拟内射系均指S^0-Act中的内射对象和拟内射对象.

我们还需要直和的概念.

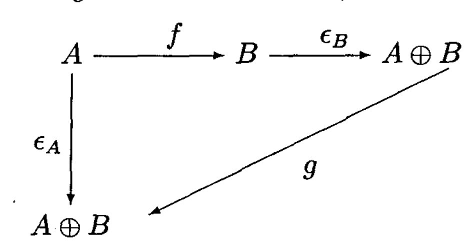
定义 3.7.3 设$A_i(i \in I)$是S-系.记集合

$$\{(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i | \text{最多有有限个} a_i \neq \theta_i\}$$

为 $\oplus_{i\in I}A_i$, 这里 θ_i 表示 A_i 中的零元. 在 $\oplus_{i\in I}A_i$ 上自然地定义 S 的左作用, 则$\oplus_{i\in I}A_i$ 构成一个 S-系, 称为 $A_i(i \in I)$ 的直和. 当 $I = \{1,\cdots,n\}$时, 也记$\oplus_{i\in I}A_i = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$.

引理 3.7.4 设A, B是S-系且使得$A\oplus B$是拟内射的.则任意单同态$f: A \longrightarrow B$是可收缩的.

证明　记$\epsilon_A : A \longrightarrow A \oplus B$和$\epsilon_B : B \longrightarrow A \oplus B$为自然的包含同态.由$A \oplus B$的拟内射性可知存在同态$g : A \oplus B \longrightarrow A \oplus B$, 使得下图可换:



即$g\epsilon_B f = \epsilon_A$.记$\pi_A : A \oplus B \longrightarrow A$为自然的投射,则有$1_A = \pi_A\epsilon_A = \pi_A g\epsilon_B f$.所以$f$是可收缩的. □

推论 3.7.5　设A是S -系.若$A \oplus I(A)$是拟内射的,则A是内射的.

证明　由引理3.7.4知包含同态$\epsilon : A \longrightarrow I(A)$是可收缩的,所以由命题3.1.2即得结论. □

定理 3.7.6　设S是幺半群,且其幂等元均为中心元.则以下几条是等价的:

(1) 任意S -系都是拟内射的;

(2) 任意S -系都是内射的(即S是完全左内射幺半群);

(3) 对于S的任意左理想L, $L \oplus S$是拟内射的;

(4) S的任意左理想都可由幂等元生成.

证明　(2)$\Longrightarrow$(1)$\Longrightarrow$(3) 显然.

(3)$\Longrightarrow$(4) 设L是S的左理想,则由(3)知$L \oplus S$是拟内射的.所以由引理3.7.4知包含同态$\epsilon : L \longrightarrow S$是可收缩的,即存在$S$ -同态$\alpha : S \longrightarrow L$, 使得$\alpha|_L = 1$.显然$\alpha$是满同态.所以$L = \alpha(S) = S\alpha(1)$.又$\alpha(1)\alpha(1) = \alpha(\alpha(1) \cdot 1) = \alpha(\alpha(1)) = \alpha(1)$,即$\alpha(1) \in E(S)$.所以$L$可由幂等元生成.

(4)$\Longrightarrow$(2) 设S的任意左理想都可由幂等元生成.由我们的约定, S含有零元.利用条件"幂等元都是中心元",和定理3.6.3的证明类似地可证任意S -系都是S -Act中的内射对象.从而任意中心S -系都是S^0-Act中的内射对象. □

定义 3.7.7　S -系M称为是Noether的,如果M的任意子系是有限生成的.幺半群S称为是左Noether的,如果$_SS$是Noether的.

一个显然的事实是: S -系M是Noether的当且仅当M满足子系的升链条件.特别地,幺半群S是左Noether的当且仅当S的左理想满足升链条件.下面的定理给出了左Noether幺半群的内射性和拟内射性特征.

定理 3.7.8　对于幺半群S,以下几条等价:

(1) 任意内射S -系的直和仍是内射的;

(2) 任意内射S -系的直和是拟内射的;

(3) S是左Noether的.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 显然;

(2)$\Longrightarrow$(3) 设有S的左理想升链:

$$0 = I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_k \subseteq \cdots .$$

记Q_i为左S -系S/I_i的内射包,令$Q = \oplus_{i=1}^{\infty} Q_i$.由(2)知$Q$ 是拟内射的.记$I = \cup I_k$,设$f_k : I \longrightarrow S/I_k$是自然的同态.则$f_k(I) \subseteq Q_k$.对任意$a \in I$,存在$t$使得对于任意$k \geqslant t, f_k(a) = 0$.所以$\prod Q_i$中的元素$(f_1(a), f_2(a), \cdots, f_k(a), \cdots)$最多只有有限个 $f_k(a) \neq 0$, 因此 $(f_1(a), f_2(a), \cdots, f_k(a), \cdots) \in Q$. 如下定义 S -同态 $f : I \longrightarrow Q$:

$$f(a) = (f_1(a), f_2(a), \cdots, f_k(a), \cdots), \qquad \forall a \in I.$$

因为$I \subseteq S \subseteq Q_1 \subseteq Q$,而$Q$是拟内射的,所以存在$S$ -同态$g : Q \longrightarrow Q$使得$g|_I = f$.设$g(1) = q \in Q$, 则对任意$x \in S, g(x) = xg(1) = xq$.设$q = (q_1, \cdots, q_k, \cdots) \in Q$,则存在$t$使得对任意$k \geqslant t, q_k = 0$.所以对任意$k \geqslant t, (xq)_k = xq_k = 0$,从而当$x \in I$时,$f(x) = g(x) = xq$的第$k$分量为0,即$f_k(x) = 0, k \geqslant t$.所以$I \subseteq I_t$,从而有$I_{t+1} = I_{t+2} = \cdots = I$.因此$S$是左Noether的.

(3)$\Longrightarrow$(1) 设$E_i (i \in I)$是内射S -系, $E = \oplus_{i \in I} E_i$.我们要证明E是内射的.

设Sa是循环S -系, $A \leqslant Sa, f : A \longrightarrow E$是任意$S$ -同态.我们首先证明存在S -同态$g : Sa \longrightarrow E$使得$g|_A = f$.

容易证明两个内射S -系的直和仍是内射的.利用数学归纳法可以证明有限个内射S -系的直和也是内射的.令$L = \{s \in S | sa \in A\}$,则$L$是$S$的左理想.因为$S$是左Noether的,所以$L$是有限生成的,从而$A$是有限生成的.所以存在$I$的有限子集合$I_0$,使得$f(A) \subseteq \oplus_{i \in I_0} E_i$.因为$\oplus_{i \in I_0} E_i$是内射的,所以存在$S$ -同态$h : Sa \longrightarrow \oplus_{i \in I_0} E_i$, 使得$h|_A = f$.令$g : Sa \longrightarrow E$为$g(x) = h(x), \forall x \in Sa$,则$g$即满足要求.

设B是任意S -系, $A \leqslant B, f : A \longrightarrow E$是任意$S$ -同态.令

$$\mathscr{A} = \{(P, g) | A \leqslant P \leqslant B, g \in \mathrm{Hom}(P, E), g|_A = f\},$$

则$\mathscr{A} \neq \emptyset$.在$\mathscr{A}$中定义如下的序:

$$(P, g) \leqslant (P', g') \Longleftrightarrow P \leqslant P', \text{且} g'|_P = g.$$

由Zorn引理知$\mathscr{A}$中有极大元,设其为(P_0, g_0).下证$P_0 = B$.假设不然,设$b \in B - P_0$.显然$P_0 \cap Sb \neq \emptyset$.令$h = g_0|_{P_0 \cap Sb} : P_0 \cap Sb \longrightarrow E$.由已证的结果知存在$S$ -同态$g : Sb \longrightarrow E$使得$g|_{P_0 \cap Sb} = h$.定义同态$g^* : P_0 \cup Sb \longrightarrow E$:

$$g^*(x) = g_0(x), \qquad \forall\, x \in P_0;$$
$$g^*(sb) = g(sb), \qquad \forall s \in S.$$

显然g^*的定义是可行的.因为$(P_0 \cup Sb, g^*) \geqslant (P_0, g_0)$但$(P_0 \cup Sb, g^*) \neq (P_0, g_0)$,所以得到矛盾.矛盾说明$P_0 = B$.所以$E$是内射$S$-系. □

关于拟内射系的直和我们有

定理 3.7.9 以下几条是等价的:

(1) 任意拟内射S-系的直和仍是拟内射的;

(2) S是左Noether的且任意拟内射S-系是内射的.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 由(1)可知任意内射S-系的直和是拟内射的,所以由定理3.7.8即知S是左Noether的.设M是拟内射S-系,则由(1)知$M \oplus I(M)$是拟内射的,所以由推论3.7.5知M是内射的.

(2)$\Longrightarrow$(1) 由定理3.7.8即得. □

§3.8 弱内射系

定义 3.8.1 称S-系M是弱内射的,如果M是${}_SS$-内射的.

显然内射S-系一定是弱内射的.设S是幺半群.则S-系${}_SS$是弱内射的当且仅当它是拟内射的.令S是群且$|S| \geqslant 2$,则${}_SS$是弱内射S-系但不是内射的.

命题 3.8.2 如果S的任意左理想都可由幂等元生成,则任意S-系M是弱内射的.

证明 设$I = Se$是S的左理想, $e^2 = e \in S$.对于任意S-同态$f : I \longrightarrow M$,定义映射$g : S \longrightarrow M$为:

$$g(s) = sf(e), \qquad \forall s \in S.$$

显然g是S-同态,且$g(se) = sef(e) = f(se)$,即$g|_I = f$.所以M是弱内射的. □

称S-系M是强挠自由的,如果对于任意$a, b \in M$,任意$s \in S$,若$sa = sb$,则$a = b$.

命题 3.8.3 设S是左Noether幺半群,且任意两个左理想有非空的交.若强挠自由S-系M的任意循环子系是弱内射的,则M是弱内射的.

证明 设I是S的任意左理想,则I是有限生成的,所以设$I = \cup_{i=1}^n Sa_i$.设$f : I \longrightarrow M$是任意S-同态.记$f(a_i) = x_i \in M$.显然$f|_{Sa_i} : Sa_i \longrightarrow Sx_i$也是$S$-同态.由$Sx_i$的弱内射性知存在$g_i : S \longrightarrow Sx_i$使得$g_i|_{Sa_i} = f|_{Sa_i}$.设$g_i(1) = y_i$,则$g_i(s) = sy_i (s \in S)$.特别地, $g_i(a_i) = a_iy_i = f(a_i) = x_i$.因为$S$的任意两个左理想有非空的交,所以存在$b_1, \cdots, b_n \in S$使得$b_1a_1 = b_2a_2 = \cdots = b_na_n$.因此$b_1a_1y_1 = b_2a_2y_2 = \cdots = b_na_ny_n$.利用$M$的强挠自由性即得$y_1 = y_2 = \cdots = y_n$.所以对任意$i = 1, 2, \cdots, n, f(a_i) = a_iy_i = a_iy_1$,故对任意$s \in I, f(s) =$

sy_1.作S -同态$g : S \longrightarrow M$为$g(s) = sy_1$,则$g|_I = f$.所以M是弱内射的. □

下面的例子说明命题3.8.3中的条件“任意两个左理想有非空的交”不能去掉.

例 3.8.4 设$T = \{a, b\}$是右零半群, $S = T^1, M = \{a, b\}$.则S是左Noether的,且M是强挠自由S -系. M的循环子系有两个: $\{a\}, \{b\}$.因为映射$f : S \longrightarrow \{a\}$是$S$ -同态,所以$\{a\}$是弱内射系,同理$\{b\}$也是弱内射系.但是M不是弱内射的.这是因为对于S -同态$g : T \longrightarrow M : g(a) = a, g(b) = b$,不存在$S$ -同态$h : S \longrightarrow M$使得$h|_T = g$.

这个例子也说明拟内射系可以不是弱内射的.事实上, M是拟内射的.这是因为: M的子系只有三个: $\{a\}, \{b\}, \{a, b\}$.容易证明从任意子系到M的任意S -同态都可扩张为M到M的S -同态.

命题 3.8.5 设S是左Noether幺半群, S -系M不是有限生成的.若M的任意真子系是弱内射的,则M是弱内射的.

证明 设I是S的任意左理想,则I是有限生成的.设$I = \cup_{i=1}^{n} Sa_i$.设$f : I \longrightarrow M$是任意S -同态.若$M = f(I)$,则易知M是有限生成的,矛盾.所以$f(I) \neq M$.由条件知$f(I)$是弱内射的,所以存在S -同态$g : S \longrightarrow f(I)$使得$g|_I = f$.因此$M$是弱内射的. □

例3.8.4说明,命题3.8.5中的条件“M不是有限生成系”不能去掉.

幺半群S的左(右)理想I称为是n-生成的(n是自然数),如果I可由$n-1$个元素生成.

命题 3.8.6 设 M 是拟内射左 S -系, H 是 M 的自同态幺半群. 若H的任意3-生成左理想都可由幂等元生成,则H是弱内射左H-系.

证明 设A是H的任意左理想, $f : A \longrightarrow H$是任意H-同态.如下定义映射$\alpha : MA \longrightarrow M$:

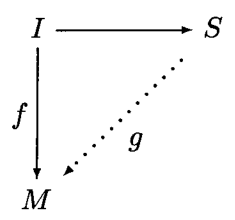
$$\alpha(ma) = mf(a), \qquad \forall m \in M, \quad \forall\, a \in A.$$

因为M是左S -右H-系,所以$mf(a)$有意义.设$ma = m'a', m, m' \in M, a, a' \in A$.由条件知左理想$Ha \cup Ha'$可由$H$的幂等元$e$生成,所以$a = ae, a' = a'e$.因此$mf(a) = mf(ae) = m(af(e)) = maf(e) = m'a'f(e) = m'f(a'e) = m'f(a')$. 这说明$\alpha$是映射. 对任意 $s \in S$, 我们有 $\alpha(s(ma)) = \alpha((sm)a) = (sm)f(a) = s(mf(a)) = s\alpha(ma)$,所以$\alpha$是$S$ -同态.因为M是拟内射的,所以存在$h \in \mathrm{Hom}_S(M, M)$,使得$h|_{MA} = \alpha$.所以对于任意$a \in A$,任意$m \in M, mf(a) = \alpha(ma) = h(ma) = (ma)h = m(ah)$,因此$f(a) = ah$.这即证明了$H$是弱内射左$H$-系. □

下面考虑弱内射系的推广——α -内射系. 设α是任意基数. S的左理想 I 称为是 α -生成的 , 如果I可由基数小于 α 的生成集生成. 显然 α -生成是 n- 生成

概念的推广.

定义 3.8.7 设M是S -系, α是任意基数且$\alpha \geqslant 2$.称M是α -内射的,如果对于S的任意α -生成左理想I,任意S -同态$f: I \longrightarrow M$,存在S -同态$g: S \longrightarrow M$使得下图可换:



显然弱内射系是α -内射的,其中α是任意基数.若$\alpha \geqslant \beta > 1$,则任意$\alpha$ -内射系一定是β-内射的.若基数α使得S的任意左理想都是α -生成的,则α -内射系即为弱内射系.

定义 3.8.8 称S -系M是主弱内射的,如果M是2-内射的.称M是弱有限内射的,如果M是$\aleph_0$-内射的.

引理 3.8.9 设M是S -系, α是任意基数, $|J| < \alpha$,考虑M 上的如下形式的方程组:

$$\Sigma = \{s_j x = a_j | s_j \in S, a_j \in M, j \in J\},$$

则如下两条是等价的:

(1) Σ是M上的容许方程组;

(2) 对S的任意元素h, k,和任意$i, j \in J$,若$hs_i = ks_j$,则$ha_i = ka_j$.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 由容许方程组的定义(§3.3)知存在S -系B使得Σ在B中有解而M是B的子系.设解为$b \in B$.对任意$h, k \in S$和任意$i, j \in J$,若$hs_i = ks_j$,则$ha_i = hs_i b = ks_j b = ka_j$.即结论成立.

(2)$\Longrightarrow$(1) 令S_z是由z生成的自由左S -系, $B = M \dot{\cup} S_z$.设

$$H = \{(a_j, s_j z) | j \in J\},$$

$\lambda = \lambda(H)$ 是由 H 生成的 B 上的同余. 对于 $m, n \in M$, 若 $m\lambda n$, 则$m = n$,或存在$t_1, \cdots, t_p \in S, c_1, d_1, \cdots, c_p, d_p \in S$使得:

$$m = t_1 c_1, t_1 d_1 = t_2 c_2, \cdots, t_{p-1} d_{p-1} = t_p c_p, t_p d_p = n,$$

其中$(c_i, d_i) \in H$或者$(d_i, c_i) \in H, i = 1, \cdots, p$.由$H$的元素形式可知$p$是偶数.利用简单的数学归纳法即可证明$m = n$.所以自然同态$M \longrightarrow B \longrightarrow B/\lambda$是单的.因此可以把$M$看成$B/\lambda$ 的子系.对任意$i \in J$,有

$$a_i = \overline{a_i} = \overline{s_i z} = s_i \overline{z},$$

所以$\bar{z}$是Σ在B/λ 中的解,故Σ是容许的. □

称S -系M满足α -Baer准则,如果对于S的任意α -生成左理想I,任意S -同态$f : I \longrightarrow M$,存在$a \in M$,使得对任意$x \in I, f(x) = xa$.

命题 3.8.10 对于S -系M,以下几条等价:

(1) M上的任意容许方程组

$$\Sigma = \{s_j x = a_j | s_j \in S, a_j \in M, j \in J\}, \quad |J| < \alpha,$$

在M中有解;

(2) M满足α -Baer准则;

(3) M是α -内射的.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 设I是S的α -生成左理想, 则$I = \cup\{St_j | j \in J\}$,这里$|J| < \alpha, t_j \in S$.设$f : I \longrightarrow M$是任意$S$ -同态.对任意$h, k \in S$,任意$i, j \in J$,若$ht_i = kt_j$,则$hf(t_i) = kf(t_j)$.所以由引理3.8.9知M上的方程组

$$\Sigma = \{t_j x = f(t_j) | j \in J\}$$

是容许方程组.由条件知Σ在M中有解a, 所以对任意$x \in I, f(x) = f(st_j) = sf(t_j) = st_j a = xa$,即$M$满足$\alpha$ -Baer准则.

(2)$\Longrightarrow$(3) 显然.

(3)$\Longrightarrow$(1) 设

$$\Sigma = \{s_j x = a_j | j \in J, s_j \in S, a_j \in M\}, \quad |J| < \alpha$$

是M上的容许方程组. 令$I = \cup\{Ss_j | j \in J\}$, 则$I$是 S 的 α -生成左理想. 规定映射 $f : I \longrightarrow M$如下:

$$f(ts_j) = ta_j, \quad \forall t \in S, \quad \forall j \in J.$$

若$ts_j = t's_i$,则由引理3.8.9知有$ta_j = t'a_i$.所以f是有定义的.显然f还是S -同态.由M的α -内射性可知,存在S -同态$g : S \longrightarrow M$使得$g|_I = f$.对于任意$j \in J$, $s_j g(1) = g(s_j) = f(s_j) = a_j$,所以$g(1)$是方程组$\Sigma$在$M$中的解. □

关于Baer准则的进一步讨论参见文献[63],[65].

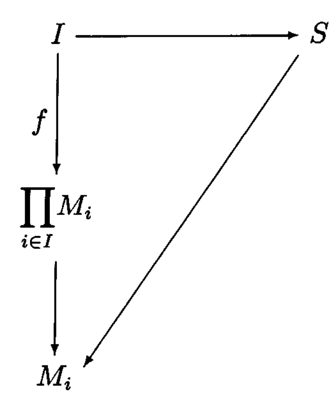
命题 3.8.11 设$\{M_i | i \in I\}$是一簇S -系.

(1) 若M_i是α -内射的, $i \in I$,则$\prod_I M_i$是α -内射的.

(2) 若$\dot{\cup}_I M_i$是α -内射的,则每个M_i是α -内射的.

证明 (2)的证明和(1)的证明对偶,所以我们只需证明(1).

设I是S的α -生成左理想, $f : I \longrightarrow \prod_I M_i$是任意$S$ -同态.由下面的交换图即可完成证明.



□

命题 3.8.12 设S是幺半群.若任意内射S -系的余积是3-内射的,则S的任意两个左理想有非空的交.

证明 否则,存在$a, b \in S$使得$Sa \cap Sb = \varnothing$.设Sy, Sz分别是由y, z生成的自由S -系,显然$Say \leqslant Sy, Sbz \leqslant Sz$.定义映射$f : Sa \cup Sb \longrightarrow I(Say)\dot{\cup}I(Sbz)$如下:

$$f(sa) = say, f(sb) = sbz, \quad \forall\ s \in S.$$

显然f是有定义的S -同态.由条件知$I(Say)\dot{\cup}I(Sbz)$是3-内射的, 所以存在S -同态$g : S \longrightarrow I(Say)\dot{\cup}I(Sbz)$,使得$g|_{Sa\cup Sb} = f$.容易证明这是矛盾的. □

推论 3.8.13 设S是幺半群. 若任意 α - 内射 S - 系的余积是 α -内射的, 这里 $\alpha > 2$,则S的任意两个左理想有非空的交.

推论3.8.13说明当$\alpha > 2$时, α -内射S -系的余积不一定是α -内射的.但是当$\alpha = 2$时我们有:

命题 3.8.14 设$\{M_i | i \in J\}$是一簇S -系.则:

(1) 余积$C = \dot{\cup}_{i\in J} M_i$是主弱内射的当且仅当每个$M_i$是主弱内射的.

(2) 积$P = \prod_{i\in J} M_i$是主弱内射的当且仅当每个M_i是主弱内射的.

证明 (1) 设$f : Ss \longrightarrow C$是任意S -同态.则$f(s) \in M_k$,所以$f(Ss) \subseteq M_k$.而M_k是主弱内射的,所以易知C是主弱内射的.反过来的证明由命题3.8.11即得.

(2) 设P是主弱内射的.我们要证明每个M_i是主弱内射的.设$f : Ss \longrightarrow M_i$是任意$S$ -同态.对任意$j \in J - \{i\}$,取定$a_j \in M_j$.如下定义映射$g : Ss \longrightarrow P$:

$$g(ts)(j) = \begin{cases} f(ts), & \text{如果 } j = i, \\ tsa_j, & \text{如果 } j \neq i. \end{cases}$$

显然g是S -同态.因为P是主弱内射的,所以存在S -同态$h: S \longrightarrow P$使得$h|_{Ss} = g$.设$p_i: P \longrightarrow M_i$是自然的投影,则$S$ -同态$(p_i h): S \longrightarrow M_i$满足$(p_i h)|_{Ss} = f$.所以$M_i$是主弱内射的. □

下面的概念是余平坦模的推广.

定义 3.8.15 称S -系M是余平坦的,如果对任意$a \in M$,任意$s \in S$,若$a \notin sM$,则存在$h, k \in S$使得$hs = ks$,但$ha \neq ka$.

命题 3.8.16 S -系M是余平坦的当且仅当M是主弱内射的.

证明 由引理3.8.9及命题3.8.10即得此结论. □

定理 3.8.17 如下条件是等价的:

(1) 所有S -系是主弱内射的;

(2) S的所有主左理想是主弱内射的;

(3) S是正则幺半群.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 显然.

(2)$\Longrightarrow$(3) 设$s \in S$.若s不是S的正则元,则$s \notin sSs$.因为Ss是主弱内射的,所以Ss是余平坦的,从而存在$h, k \in S$,使得$hs = ks$但$hs \neq ks$.矛盾.所以S是正则的.

(3)$\Longrightarrow$(1) 设M是任意S -系,$a \in M, s \in S$,满足$a \notin sM$.由于S是正则的,所以存在$s' \in S$ 使得$ss's = s = 1 \cdot s$.但$ss'a \neq 1 \cdot a = a$(否则$a \in sM$).所以M是余平坦的.由命题3.8.16即知M是主弱内射的. □

定理 3.8.18 设S是幺半群, α是任意基数.则如下条件是等价的:

(1) 所有S -系是α -内射的;

(2) S的任意左理想是α -内射的;

(3) S的任意α -生成左理想是α -内射的;

(4) S是正则的,且S的任意α -生成左理想是主左理想.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2)$\Longrightarrow$(3) 显然.

(3)$\Longrightarrow$(4) 由α -内射的定义可知$\alpha > 1$.所以S的任意主左理想都是α -内射的,从而是主弱内射的.由定理3.8.17知S是正则的.设I是任意α -生成左理想,则I是α -内射的.所以自然包含同态$I \longrightarrow S$是可收缩的.因此I是主左理想.

(4)$\Longrightarrow$(1) 由定理3.8.17知所有S -系是主弱内射的.又因为所有α -生成左理想是主理想,所以任意主弱内射S -系是α -内射的. □

推论 3.8.19 如下条件是等价的:

(1) 所有S -系是弱有限内射的;

(2) 所有S -系是3-内射的;

(3) S的所有3-生成左理想是3-内射的;

(4) S是正则的,且S的所有主左理想按照包含关系构成链.

证明　(1)$\Longrightarrow$(2)$\Longrightarrow$(3) 显然.

(3)$\Longrightarrow$(4) 由定理3.8.18知S是正则的,且S的任意由两个元素生成的左理想是主左理想.因此对于任意$a, b \in S$,有$Sa \subseteq Sb$或$Sb \subseteq Sa$.

(4)$\Longrightarrow$(1) 容易证明S的任意有限生成左理想是主左理想,所以弱有限内射和主弱内射是一致的.又因为S是正则的,所以定理3.8.17告诉我们,所有S -系是主弱内射的. □

推论 3.8.20　如下条件是等价的:

(1) 所有S -系是弱内射的;

(2) S是正则的,且所有左理想均为主左理想.

以下讨论和直和有关的问题,其主要结果选自文献[5].

设$\{M_i|i \in I\}$是一簇S -系,且每个M_i都含有零元θ_i.和定义3.7.3类似地我们可以定义$\{M_i|i \in I\}$的直和$\oplus_{i\in I}M_i$为

$$\{(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i \mid \text{最多有有限个} a_i \neq \theta_i\}$$

以及自然的左S -作用.因为M_i的零元不一定是唯一的,所以这样定义的直和显然和选取的零元θ_i有关系.当θ_i取定以后, $(\theta_i)_{i\in I}$就是$\oplus_{i\in I}M_i$的零元.

命题 3.8.21　设$M_i(i \in I)$是主弱内射(弱有限内射)左S -系,且M_i具有零元$\theta_i(i \in I)$.则$\oplus_{i\in I}M_i$是主弱内射(弱有限内射)的.

证明　设$a \in S, Sa$是S的主左理想, $f : Sa \longrightarrow \oplus_{i\in I}M_i$是任意$S$ -同态.显然$f(a) \in \oplus_{i\in I}M_i$有有限多个分量不等于$\theta_i$.所以可以假定$f(a) \in M_{i_1}\oplus\cdots\oplus M_{i_n}$.容易证明两个(从而利用数学归纳法知有限个)主弱内射S -系的直和仍为主弱内射的,所以由$\mathrm{Im}\ f \leqslant M_{i_1} \oplus\cdots\oplus M_{i_n}$ 知存在S -同态$g : S \longrightarrow M_{i_1} \oplus\cdots\oplus M_{i_n}$使得$g|_{Sa} = f$.显然可以把$g$看成是从$S$到$\oplus_{i\in I}M_i$的$S$ -同态. 所以$\oplus_{i\in I}M_i$是主弱内射的.同理可以证明$\oplus_{i\in I}M_i$是弱有限内射的. □

定义 3.8.22　设M是S -系.称M是P-拟内射的,如果对于M 的任意主弱内射子系N,任意S -同态$f : N \longrightarrow M$,存在S -同态$g : M \longrightarrow M$,使得$g|_N = f$. P-拟内射S -系简记为PQI系.

显然拟内射系是PQI系. 称S -系M是完全不可约的, 如果M的同余只有两个: 泛同余 $M \times M$和单位同余1_M.显然完全不可约S -系没有真的非零子系,所以是PQI系.

命题 3.8.23　设M是S -系, $I(M)$是M的内射包.则如下条件是等价的:

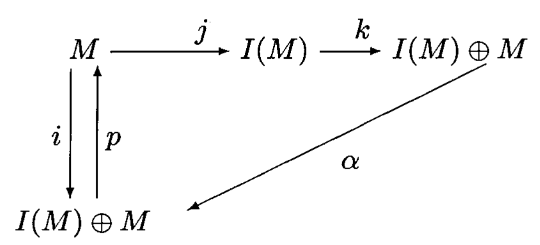
(1) M是内射的;

(2) 自然同态$M \longrightarrow I(M)$是可收缩的;

(3) M是主弱内射的且含有零元, $I(M)\oplus M$是PQI系.

证明 (1)$\Longleftrightarrow$(2) 显然.

(3)$\Longrightarrow$(2) 设$i: M\longrightarrow I(M)\oplus M, k: I(M)\longrightarrow I(M)\oplus M, j: M\longrightarrow I(M), p: I(M)\oplus M\longrightarrow M$是自然的$S$-同态.考虑下面的图:



由于 M 是主弱内射的, 且 $I(M)\oplus M$ 是 PQI 的, 所以存在 $\alpha: I(M)\oplus M\longrightarrow I(M)\oplus M$ 使得 $\alpha kj = i$. 所以$p\alpha kj = 1_M$. 这说明S-同态j是可收缩的.

(1)$\Longrightarrow$(3) 因为M是内射的,所以M是主弱内射的且含有零元.由命题3.1.7知$I(M)\oplus M = I(M)\times M$是内射$S$-系,因此是PQI系. □

命题 3.8.24 任意内射S-系的直和仍是内射的当且仅当S是左Noether幺半群.

证明 类似于定理3.7.8的证明(因为内射系含有零元, 所以内射系的直和也含有零元 θ. 在定理3.7.8(3)$\Longrightarrow$(1) 的证明中, 若 $P_0\cap Sb=\varnothing$, 则定义 S-同态 $g: Sb\longrightarrow E$为$g(sb)=\theta$). □

设S-系M含有零元.称M是Σ-内射(Σ-拟内射)的, 如果对于任意集合I,直和$\oplus_I M$是内射(拟内射)的.下定理中研究的幺半群的内部特征将在定理3.10.9中给出.

定理 3.8.25 对于幺半群S,以下条件等价:

(1) 任意主弱内射S-系是内射的;

(2) 任意主弱内射S-系是Σ-内射的,且含有零元;

(3) 任意主弱内射S-系是Σ-拟内射的,且含有零元;

(4) 任意主弱内射S-系是拟内射的,且含有零元;

(5) 任意主弱内射S-系是PQI系且含有零元.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 因为内射S-系必含有零元, 所以任意主弱内射S-系必含有零元.设$\{M_i|i\in I\}$是内射S-系,则由命题3.8.21知$\oplus_{i\in I}M_i$是主弱内射的,从而由条件知是内射的.由命题3.8.24知S 是左Noether的.所以任意主弱内射S-系是Σ-内射的,且含有零元.

(2)$\Longrightarrow$(3)$\Longrightarrow$(4)$\Longrightarrow$(5) 显然.

(5)$\Longrightarrow$(1) 设M是主弱内射系. 由条件知 M 含有零元. 作直和 $I(M)\oplus M$, 这里 $I(M)$ 是 M 的内射包.由命题3.8.21知$I(M)\oplus M$是主弱内射的,因此由条

件知$I(M)\oplus M$是PQI系,从而由命题3.8.23知M是内射的. □

推论 3.8.26 设S是正则幺半群且含有零元,则如下条件等价:

(1) 任意S -系是内射的;

(2) 任意S -系是拟内射的;

(3) 任意S -系是PQI系.

证明 由定理3.8.17和定理3.8.25即得此结论. □

设S是正则幺半群,则对于S的任意极大左理想K,Rees商$S/K=S/\lambda_K$是弱内射S -系. 这是因为:设B是S的任意左理想,$f:B\longrightarrow S/K$是任意S -同态,若$f(B\cap K)\neq\{K\}$(S -系S/K的零元),则存在$a\in B\cap K$使得$f(a)\notin K$.因为S是正则的,所以存在$b\in S$使得$a=aba$.因此$f(a)=f(aba)=af(ba)\in(K)S/K\leqslant K$.矛盾.所以$f(B\cap K)=\{K\}$.考虑如下两种情形:

(i)$B\cup K=K$.此时$f(B)=f(B\cap K)=\{K\}$.所以f可以扩张为S -同态$S\longrightarrow S/K$.

(ii)$B\cup K=S$.如下定义$g:S\longrightarrow S/K$:

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & x\in B,\\ \{K\}, & x\in K.\end{cases}$$

显然g是有定义的,且$g|_B=f$.这即证明了S/K是弱内射的.

定理 3.8.27 如下条件是等价的:

(1) 所有弱内射S -系是内射的,且S是左Noether的;

(2) 所有弱有限内射S -系是内射的;

(3) 所有弱有限内射S -系是拟内射的且含有零元.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 因为S是左Noether幺半群, 所以任意弱有限内射S -系是弱内射的,从而是内射的.

(2)$\Longrightarrow$(3) 因为任意内射S -系必含有零元,所以任意弱有限内射S -系是拟内射的且含有零元.

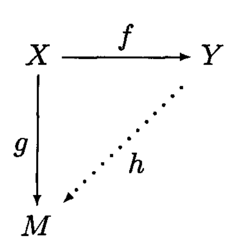
(3)$\Longrightarrow$(2) 设M是弱有限内射S -系.由条件知M含有零元.设$I(M)$是M的内射包.作直和$D=I(M)\oplus M$.则D是弱有限内射的.由条件即知D是拟内射的,从而是PQI系.显然M还是主弱内射系.所以由命题3.8.23即知M是内射的.

(2)$\Longrightarrow$(1) 设$\{M_i|i\in I\}$是一簇内射S -系.因为任意内射S -系是弱有限内射的,所以由命题3.8.21知$\oplus_{i\in I}M_i$是弱有限内射的,从而是内射的.因此由命题3.8.24知S是左Noether的.显然任意弱内射S -系是弱有限内射的,从而是内射的. □

§3.9 有限内射系

本节的主要结果选自文献[5].

定义 3.9.1 称 S -系M是有限内射的, 如果对于任意有限生成 S -系 X, 任意S -单同态$f : X \longrightarrow Y$,任意S -同态$g : X \longrightarrow M$,存在S -同态$h : Y \longrightarrow M$,使得下图可换:



显然有限内射系是弱有限内射的,而任意内射系一定是有限内射的. 下面的定理给出了有限内射系的等价条件.

定理 3.9.2 设A是S -系,则如下几条等价:

(1) A是有限内射的;

(2) 对于A的任意扩张系B,和A的任意有限子集合$\{a_1, \cdots, a_n\}$,存在S -同态$f : B \longrightarrow A$使得$f(a_i) = a_i, i = 1, \cdots, n$;

(3) 对于A的任意有限子集合$\{a_1, \cdots, a_n\}$,存在S -同态$f : I(A) \longrightarrow A$, 使得$f(a_i) = a_i, i = 1, \cdots, n$,这里$I(A)$是$A$的内射包.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 设A'是由$a_1, \cdots, a_n$生成的子系, $\alpha : A' \longrightarrow B$和$\beta : A' \longrightarrow A$是自然的包含同态.因为$A$是有限内射的,所以存在$f : B \longrightarrow A$使得$f\alpha = \beta$.因此对任意$i = 1, \cdots, n$,有

$$f(a_i) = f\alpha(a_i) = \beta(a_i) = a_i.$$

(2)$\Longrightarrow$(3) 显然.

(3)$\Longrightarrow$(1) 设X是有限生成S -系, $\alpha : X \longrightarrow Y$是$S$ -单同态, $\beta : X \longrightarrow A$是$S$ - 同态. 记 $\tau : A \longrightarrow I(A)$ 是自然的包含同态. 设 X 的生成元为 $x_1, \cdots, x_n$.由$I(A)$的内射性知存在S -同态$g : Y \longrightarrow I(A)$使得$g\alpha = \tau\beta$.由条件知存在$S$ -同态$h : I(A) \longrightarrow A$使得$h(\beta(x_i)) = \beta(x_i), i = 1, \cdots, n$. 令$f = hg$,则$f\alpha(x_i) = hg\alpha(x_i) = h\tau\beta(x_i) = h\beta(x_i) = \beta(x_i)$,所以$f\alpha = \beta$,即$A$是有限内射的. □

我们知道S -系A是内射的当且仅当任意包含同态$f : A \longrightarrow B$是可收缩的,即存在S -同态$g : B \longrightarrow A$使得$g|_A = 1$.因此定理3.9.2给出了有限内射性的类似特征.

推论 3.9.3 任意有限生成的有限内射系是内射的.

证明 设A是有限生成的有限内射系.则由定理3.9.2知包含同态$A \longrightarrow I(A)$是可收缩的,所以A是内射系. □

定理 3.9.4 如下条件是等价的:

(1) 所有有限内射S -系是内射的;

(2) 所有有限内射S -系是弱内射的;

(3) 所有有限内射S -系是拟内射的;

(4) S是左Noether幺半群.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2)和(1)$\Longrightarrow$(3)是显然的.

(3)$\Longrightarrow$(4) 类似于命题3.8.21可以证明有限内射S -系的直和是有限内射的,所以任意内射S -系的直和是有限内射的,从而由条件知是拟内射的.类似于定理3.7.8的证明即知S是左Noether幺半群.

(2)$\Longrightarrow$(4) 考察定理3.7.8 的证明,我们发现S是左Noether的当且仅当任意内射S -系的直和是弱内射的.所以类似于(3)$\Longrightarrow$(4)即可完成证明.

(4)$\Longrightarrow$(1) 设A是有限内射S -系, Sz是循环S -系, $\alpha : X \longrightarrow Sz$是$S$ -单同态, $\beta : X \longrightarrow A$是$S$ -同态.令

$$I = \{s \in S | sz \in \alpha(X)\},$$

则I是S的左理想.由于S是左Noether幺半群,故I是有限生成的,从而X是有限生成的.所以由A的有限内射性即知存在S -同态$\psi : Sz \longrightarrow A$使得$\psi\alpha = \beta$. 设$B$是任意$S$ -系,$C \leqslant B, f : C \longrightarrow A$是$S$ -同态.令

$$\mathscr{A} = \{(P, g) | C \leqslant P \leqslant B, g \in \mathrm{Hom}(P, A), g|_C = f\},$$

则$\mathscr{A} \neq \varnothing$.在$\mathscr{A}$中定义如下的偏序:

$$(P, g) \leqslant (P', g') \Longleftrightarrow P \leqslant P', \text{且} g'|_P = g.$$

由Zorn引理知$\mathscr{A}$中有极大元,设其为(P_0, g_0).下证$P_0 = B$.假设不然,取$b \in B - P_0$.如果$P_0 \cap Sb \neq \varnothing$,那么令$h = g_0|_{P_0 \cap Sb} : P_0 \cap Sb \longrightarrow A$.由已证的结果知存在$S$ -同态$g : Sb \longrightarrow A$使得对任意$a \in P_0 \cap Sb$有$g(a) = h(a)$.如下定义S -同态$g^* : P_0 \cup Sb \longrightarrow A$:

$$\begin{aligned} g^*(x) &= g_0(x), \qquad \forall x \in P_0, \\ g^*(x) &= g(x), \qquad \forall x \in Sb. \end{aligned}$$

显然g^*的定义是可行的.如果$P_0 \cap Sb = \varnothing$,那么令$g : Sb \longrightarrow A$为: $g(sb) = \theta, \forall\ s \in S$,这里$\theta$是$A$中的零元(容易证明任意有限内射$S$ -系都含有零元).同上类似的方法可定义S -同态$g^* : P_0 \cup Sb \longrightarrow A$.因为

$$(P_0 \cup Sb, g^*) \geqslant (P_0, g_0), \text{ 但}(P_0 \cup Sb, g^*) \neq (P_0, g_0),$$

所以与(P_0, g_0)的极大性矛盾.矛盾说明$P_0 = B$.所以A是内射S -系. □

定理 3.9.5 如下儿条是等价的:

(1) 所有S -系是有限内射的;

(2) 所有有限生成S -系是内射的.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 由推论3.9.3即得.

(2)$\Longrightarrow$(1) 设X是有限生成S -系, $\alpha : X \longrightarrow Y$是$S$ -单同态, A是任意S -系, $\beta : X \longrightarrow A$是任意$S$ -同态. 显然$\beta(X)$是有限生成的, 从而是内射的, 所以存在S -同态$\phi : Y \longrightarrow \beta(X)$使得$\phi\alpha = \beta$.因此$A$是有限内射的. □

定理 3.9.6 设所有S -系都是有限内射的,则S是正则自内射幺半群,且其所有左理想按照集合的包含关系构成全序集.

证明 设 I 是 S 的有限生成左理想, 则由 I 的有限内射性知存在 S -同态 $f : S \longrightarrow I$使得$f|_I = 1$. 显然$f(1) \in I$,所以$f(1)f(1) = f(f(1)) = f(1)$.令$e = f(1)$,则$e \in E(S)$.又$I = Ie \subseteq Se \subseteq I$,所以$I = Se$. 即任意有限生成左理想可由幂等元生成.所以$S$是正则幺半群.由推论3.9.3可知$S$是内射左$S$ -系.

设$a, b \in S$,则$Sa \cup Sb$可由幂等元生成,所以必有$Sa \subseteq Sb$或$Sb \subseteq Sa$.设I, J是S的两个左理想.若$I \not\subseteq J$且$J \not\subseteq I$,则存在$a \in I - J, b \in J - I$.由上可知对于a, b有$Sa \subseteq Sb$或$Sb \subseteq Sa$,所以$a \in J$或$b \in I$,矛盾.所以必有$I \subseteq J$或$J \subseteq I$. □

称幺半群S是遗传的(半遗传的),如果S的任意(有限生成)左理想是投射的.由定理3.9.6的证明可得:

命题 3.9.7 设所有左S -系是有限内射的,则S是半遗传幺半群.若S还是左Noether的,则S是遗传幺半群.

§3.10 α -内射系

在§3.8中,作为弱内射系的推广,我们已经讨论过α -内射系,也研究过所有S -系都是α -内射系的幺半群.本节我们先给出一个构造α -内射系的方法,然后以此为基础,利用α -内射性研究幺半群的同调分类.本节主要内容选自Gould[99]的文章.

设α是任意基数且$1 < \alpha \leqslant \aleph_0$, A是任意S -系,我们要构造一个α -内射系$A^{[\alpha]}$,使得$A \leqslant A^{[\alpha]}$.对任意满足$1 \leqslant n < \alpha$的自然数n,令

$$\begin{aligned}\Sigma_0^n &= \{((a_1, s_1), \cdots, (a_n, s_n)) \in (A \times S)^n | ss_i = ts_j \Longrightarrow \\ &\quad sa_i = ta_j, s, t \in S, i, j \in \{1, \cdots, n\}\}, \\ \Sigma_0 &= \cup_{n<\alpha} \Sigma_0^n.\end{aligned}$$

以Σ_0为基作自由S -系

$$F = \cup\{Sx_\sigma | \sigma \in \Sigma_0\}.$$

对于任意$\sigma \in \Sigma_0^n$,$\sigma = ((a_1, s_1), \cdots, (a_n, s_n))$,我们称$(a_i, s_i)$为$\sigma$的第$i$ 分量,记为$\sigma_i = (a_i, s_i)$.令

$$H_0 = \{(a_i, s_i x_\sigma) | \sigma \in \Sigma_0^n, n < \alpha, (a_i, s_i) = \sigma_i,\ i \in \{1, \cdots, n\}\},$$

$$A_1 = (A \cup F)/\lambda(H_0),$$

这里$\lambda(H_0)$是由H_0生成的$A \cup F$上的最小同余.

定义映射$f: A \longrightarrow A_1$如下:

$$f(a) = [a], \qquad \forall\, a \in A,$$

这里$[a]$表示$a \in A \cup F$所在的$\lambda(H_0)$-类.下面证明f是单的.

设$a_1, a_2 \in A$,满足$[a_1] = [a_2]$.则$a_1 = a_2$或存在自然数p使得

$$a_1 = t_1 c_1, t_1 d_1 = t_2 c_2, \cdots, t_{p-1} d_{p-1} = t_p c_p, t_p d_p = a_2,$$

这里$t_1, \cdots, t_p \in S, (c_i, d_i)$或$(d_i, c_i) \in H_0, i = 1, \cdots, p$.因为$a_1, a_2 \in A$,所以$p$为偶数.设$p = 2q$.我们对$q$用数学归纳法证明$a_1 = a_2$.

设$q = 1$,此时有

$$a_1 = t_1 c_1, t_1 d_1 = t_2 c_2, t_2 d_2 = a_2.$$

显然$c_1 \in A$,所以存在$(a_i, s_i x_\sigma) \in H_0$,使得$(c_1, d_1) = (a_i, s_i x_\sigma)$.这里$\sigma \in \Sigma_0^n, n < \alpha$.因此$d_1 = s_i x_\sigma$.从$t_1 d_1 = t_2 c_2$知存在$j \in \{1, \cdots, n\}$使得$c_2 = s_j x_\sigma, d_2 = a_j$,且$(a_j, s_j x_\sigma) = \sigma_j$.所以$t_1 s_i x_\sigma = t_2 s_j x_\sigma$, 故$t_1 s_i = t_2 s_j$.由$\Sigma_0^n$的定义即知有$t_1 a_i = t_2 a_j$.所以$a_1 = t_1 c_1 = t_1 a_i = t_2 a_j = t_2 d_2 = a_2$.

设$q > 1$.此时有

$$a_1 = t_1 c_1, t_1 d_1 = t_2 c_2, \cdots, t_{2q} d_{2q} = a_2.$$

和上面的证明类似地可知$a_1 = t_3 c_3$.所以有

$$a_1 = t_3 c_3, t_3 d_3 = t_4 c_4, \cdots, t_{2q} d_{2q} = a_2.$$

由归纳假定即知$a_1 = a_2$.因此f是单同态.我们可以把$a \in A$等同于$[a] \in A_1$,从而A就是A_1的子系.

在上述构造过程中,以A_1换A,可以构造出A_2.这个过程一直继续下去,可以得到$\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, F_1, F_2, \cdots, H_1, H_2, \cdots$,从而得到$A_1 \leqslant A_2 \leqslant \cdots$.对于任意$i$, 我们要构造$F_i$时,显然可以使得$F_i$的基不同于$F_0, F_1, \cdots, F_{i-1}$的基.为了方便,我们记$a \in A_n \cup F_n$所在的$\lambda(H_n)$-类为$[a]_n$.

令$A^{[\alpha]} = \cup_{i=0}^{\infty} A_i$,这里$A_0 = A$.我们有:

定理 3.10.1 $A^{[\alpha]}$是α -内射系.

证明 设$I = \cup_{k\in K} Ss_k$是S的左理想且$|K| < \alpha$, $g : I \longrightarrow A^{[\alpha]}$是$S$ -同态.对任意$k, j \in K$,若$ss_k = ts_j$,则有$sg(s_k) = tg(s_j)$.因为K是有限集合,所以可设$K = \{1, \cdots, m\}$.因为$A_0 \leqslant A_1 \leqslant A_2 \leqslant \cdots$,所以存在$n$使得$g(s_1), \cdots, g(s_m) \in A_n$.故

$$\sigma = ((g(s_1), s_1), \cdots, (g(s_m), s_m)) \in \Sigma_n,$$

从而x_σ是F_n的基元素,所以$[x_\sigma]_n \in A_{n+1}$.对任意$k \in K$,有

$$g(s_k) = [g(s_k)]_n = [s_k x_\sigma]_n = s_k [x_\sigma]_n.$$

所以对任意$s \in I$有$g(s) = s[x_\sigma]_n$.这说明$A^{[\alpha]}$满足α -Baer准则,从而由命题3.8.10知$A^{[\alpha]}$是α -内射的. □

所以对于任意S -系A,存在A的扩张系$A^{[\alpha]}$,使得$A^{[\alpha]}$是α -内射的. 有了定理3.10.1,我们就可以利用α -内射性研究幺半群的同调分类问题了.为此先证明引理3.10.2.

引理 3.10.2 设A是S-系, $A^{[2]}$如定理3.10.1.若存在$b \in A_n, n > 0$,使得$A \subseteq Sb$,则存在$c \in A_{n-1}$使得$A \subseteq Sc$.

证明 若$b \in A_{n-1}$,则结论成立.下设$b \in A_n - A_{n-1}$.由A_n的构造过程可知存在$u \in S, \sigma \in \Sigma_{n-1}$,使得$b = [ux_\sigma]_{n-1}$.由条件知对于任意$a \in A$,存在$v \in S$使得$a = vb$.所以$[a]_{n-1} = [vux_\sigma]_{n-1}$.而在$A_{n-1} \cup F_{n-1}$中$a \neq vux_\sigma$,所以存在$t_1, \cdots, t_p \in S$使得:

$$vux_\sigma = t_1 c_1, t_1 d_1 = t_2 c_2, \cdots, t_p d_p = a,$$

这里(c_i, d_i)或$(d_i, c_i) \in H_{n-1}$.所以$(c_1, d_1) = (sx_\sigma, c)$,而$\sigma = (c, s)$, 这是因为$\alpha = 2$.对于$t_1 c$和$a$,类似于前面的证明可知$t_1 c = a$.所以$A \subseteq Sc$,而$c \in A_{n-1}$. □

定理 3.10.3 设基数$\alpha > 1$,则如下条件是等价的:

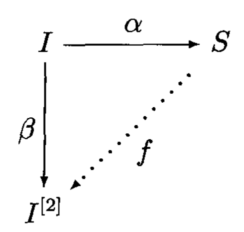
(1) 所有主弱内射S -系是α -内射的;

(2) S的任意α -生成左理想是主左理想.

证明 (2)$\Longrightarrow$(1) 若S的任意α -生成左理想是主左理想,则α -内射系和主弱内射系是一致的,所以结论成立.

(1)$\Longrightarrow$(2) 设$I = \cup_{k\in K} Su_k$是S的α -生成左理想, $|K| < \alpha$. 构造S -系$I^{[2]}$,它是主弱内射的,所以是α -内射的.设$\alpha : I \longrightarrow S$和$\beta : I \longrightarrow I^{[2]}$是自然的包含同

态,则存在S -同态$f: S \longrightarrow I^{[2]}$, 使得下图可换:



所以对任意$k \in K, f(u_k) = f\alpha(u_k) = \beta(u_k) = u_k$,故$u_k = u_k f(1)$.因此有

$$I = \cup_{k\in K} S u_k = \cup_{k\in K} S u_k f(1) \subseteq Sf(1).$$

而$f(1) \in I^{[2]}$,所以存在n使得$f(1) \in I_n$.若$n = 0$,则$f(1) \in I$,故$I = Sf(1)$.若$n > 0$,则由引理3.10.2知存在$c \in I_{n-1}$使得$I \subseteq Sc$.若$n = 1$,则$c \in I_0 = I$,所以$I = Sc$.若$n > 1$,则利用引理3.10.2继续上述过程.总之可以证明I是主左理想. □

推论 3.10.4　如下条件是等价的:

(1) 所有主弱内射S -系是弱内射的;

(2) S是主左理想幺半群,即S的任意左理想都是主左理想.

证明　在定理3.10.3中令$\alpha = |S|$即可. □

推论 3.10.5　设基数α满足$2 < \alpha \leqslant \aleph_0$,则如下条件是等价的:

(1) 所有主弱内射S -系是弱有限内射的;

(2) 所有主弱内射S -系是α -内射的;

(3) 所有主弱内射S -系是3-内射的;

(4) S的任意3-生成左理想是主左理想;

(5) S的任意有限生成左理想是主左理想.

证明　(1)$\Longrightarrow$(2)$\Longrightarrow$(3) 显然.

(3)$\Longrightarrow$(4) 由定理3.10.3即得.

(4)$\Longrightarrow$(5) 设$a, b \in S$,则$Sa \cup Sb$是3-生成左理想,从而是主左理想,因此必有$Sa \subseteq Sb$或$Sb \subseteq Sa$.由此即可得知任意有限生成左理想是主左理想.

(5)$\Longrightarrow$(1) 由定理3.10.3即得结论. □

引理 3.10.6　设A是S -系, $A^{[\aleph_0]}$是定理3.10.1 中构造的α - 内射S -系.如果A包含在A_n的某个有限生成子系中,那么A包含在A_{n-1}的有限生成子系中.

证明　设$b_1, \cdots, b_m \in A_n$使得$A \subseteq \cup_{i=1}^m Sb_i$.如果$b_i$都在$A_{n-1}$中,则结论自然成立.设$b_1, \cdots, b_r \in A_n - A_{n-1}, b_{r+1}, \cdots, b_m \in A_{n-1}$.因为$A_n = (A_{n-1} \cup F_{n-1})/\lambda(H_{n-1})$,所以

$$b_i = [u_i x_{\sigma_i}]_{n-1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant r,$$

这里$\{x_\sigma|\sigma \in \Sigma_{n-1}\}$是$F_{n-1}$的基, $\sigma_1,\cdots,\sigma_r \in \Sigma_{n-1}, u_1,\cdots,u_r \in S$.设对任意$i \in \{1,\cdots,r\}, \sigma_i \in \Sigma_{n-1}^{p_i}$,且

$$\sigma_i = ((c_{i1}, s_{i1}), \cdots, (c_{ip_i}, s_{ip_i})).$$

设$a \in A$,且$a \in Sb_i, i \in \{1,\cdots,r\}$.则存在$v \in S$使得$a = vb_i$.所以$a = [a]_{n-1} = [vu_ix_{\sigma_i}]_{n-1}$.显然$a \neq vu_ix_{\sigma_i}$,所以存在$t_1,\cdots,t_q \in S$使得

$$vu_ix_{\sigma_i} = t_1c_1, t_1d_1 = t_2c_2, \cdots, t_qd_q = a,$$

其中(c_i, d_i)或$(d_i, c_i) \in H_{n-1}$.所以存在$j \in \{1,\cdots,p_i\}$,使得:

$$c_1 = s_{ij}x_{\sigma_i}, d_1 = c_{ij}.$$

和定理3.10.1前面的证明类似地可证$t_1c_{ij} = a$.所以

$$A \subseteq (\cup_{\substack{1\leqslant i\leqslant r \\ 1\leqslant j\leqslant p_i}} Sc_{ij}) \cup (\cup_{r<k\leqslant m} Sb_k),$$

即A包含在A_{n-1}的有限生成子系中. □

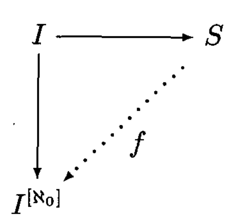
定理 3.10.7 设基数$\alpha \geqslant \aleph_0$,则以下条件是等价的:

(1) 所有弱有限内射S-系是α-内射的.

(2) S的任意α-生成左理想是有限生成的.

证明 (2)$\Longrightarrow$(1) 因为S的任意α-生成左理想是有限生成的,所以弱有限内射和α-内射是一致的概念,故结论成立.

(1)$\Longrightarrow$(2) 设I是S的α-生成左理想.考虑如下的图:



由$I^{[\aleph_0]}$的α-内射性可知存在S-同态$f: S \longrightarrow I^{[\aleph_0]}$使得上图可换. 对任意$r \in I$,有

$$r = f(r) = rf(1).$$

所以$I \subseteq Sf(1)$.如果$f(1) \in I$,则$I = Sf(1)$,所以I是有限生成的.设$f(1) \in I_n - I_{n-1}$,则$I \subseteq Sf(1) \subseteq I_n$,即$I$包含在$I_n$的有限生成子系中,所以由引理3.10.6知$I$包含在$I_{n-1}$的有限生成子系中. 如果$n > 1$,则还可以利用引理3.10.6.最后可得$I$包含在$I$的有限生成子系中,所以$I$是有限生成的. □

推论 3.10.8　设基数β满足$|S| \geqslant \beta \geqslant \aleph_1$,则如下条件是等价的:

(1) 所有弱有限内射S -系是弱内射的;

(2) 所有弱有限内射S -系是β-内射的;

(3) 所有弱有限内射S -系是$\aleph_1$内射的;

(4) S的任意可数生成左理想是有限生成的;

(5) S是左Noether幺半群.

证明　(1)$\Longrightarrow$ (2)$\Longrightarrow$ (3) 显然.

(3)$\Longrightarrow$ (4) 由定理3.10.7即得.

(4)$\Longrightarrow$ (5) 设I是S的左理想.若I不是有限生成的,则存在S的左理想严格升链:

$$Sa_1 < Sa_1 \cup Sa_2 < Sa_1 \cup Sa_2 \cup Sa_3 < \cdots,$$

这里$a_1, a_2, \cdots \in I$.令$J = \cup_{i=1}^{\infty} Sa_i$,则$J$是$S$的可数生成左理想,所以由条件知$J$是有限生成的, 即 $J = \cup_{j=1}^{m} Sb_j$, b_1, $\cdots$, $b_m \in J$. 由此容易证明存在 n 使得$J = \cup_{i=1}^{n} Sa_i$.矛盾.因此I是有限生成左理想,即S是左Noether幺半群.

(5)$\Longrightarrow$ (1) 由定理3.10.7即得结论.　□

定理3.8.17刻画了所有S -系是主弱内射系的幺半群.定理3.8.25给出了所有主弱内射S -系是内射系的幺半群的一些等价条件. 有了定理3.10.1中关于$A^{[\alpha]}$的构造, 我们就可以刻画所有主弱内射系是内射系的幺半群.为此先引入下列记号:

设A是左S -系, $a \in A$.定义

$$\mathrm{ann}(a) = \{(u, v) \in S \times S | ua = va\}.$$

显然ann(a)是S的左同余,称为元素a的左零化子同余.

设λ是S上的左同余,定义

$$\mathrm{Ann}(\lambda) = \{s \in S | (u, v) \in \lambda \Longrightarrow us = vs\},$$

则Ann$(\lambda) = \varnothing$,或Ann(λ)是S的右理想.当Ann$(\lambda) \neq \varnothing$时,称其为$\lambda$ 的右零化子理想.

设λ, ρ是S上的左同余, $t \in S$.定义

$$\begin{aligned}\mathrm{Ann}(\lambda, t, \rho) = \{s \in S | &\text{如果}(u, v) \in \lambda\text{且}us \neq vs, \text{则存在} \\ &h, k \in S\text{使得}us = ht, h\rho k, kt = vs\} \cup \mathrm{Ann}(\lambda).\end{aligned}$$

设$s,t\in S.s$和t的n-连接是指满足如下条件的n元组$P=(p_1,\cdots,p_n),Q=(q_1,\cdots,q_n),R=(r_1,\cdots,r_n)\in S^n$：

$$\begin{aligned}sp_1&=r_1q_1\\ r_1p_2&=r_2q_2\\ &\cdots\cdots\\ r_{n-1}p_n&=r_nq_n\\ r_n&=t.\end{aligned}$$

定理 3.10.9 对于幺半群S,以下两条等价：

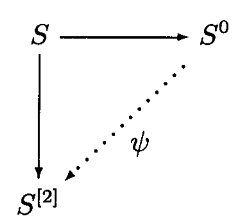
(1) 所有主弱内射S -系是内射的;

(2) S是主左理想幺半群,含有右零元,且满足如下的条件(CI)：

(CI) 对S的任意左同余λ,任意$s\in S$,存在$t,u\in S$,以及S上的左同余$\lambda_0=\lambda,\lambda_1,\cdots,\lambda_n$使得存在$s$和$t$的$n$-连接$P=(p_1,\cdots,p_n),Q=(q_1,\cdots,q_n),R=(r_1,\cdots,r_n)$满足$\mathrm{ann}(q_i)\subseteq\lambda_i,p_i\in\mathrm{Ann}(\lambda_{i-1},q_i,\lambda_i)(1\leqslant i\leqslant n),tus\lambda s,\lambda_n=\{(h,k)|hus\lambda kus\}$.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 设所有主弱内射S -系是内射的,则由推论3.10.4知S是主左理想幺半群.

对于S -系S,构造主弱内射S -系$S^{[2]}$.由条件知$S^{[2]}$ 是内射的,所以存在S -同态ψ使得下图可换：



对于任意$s\in S,\psi(0)=\psi(s0)=s\psi(0)$,所以$\psi(0)$是$S^{[2]}$中的右零元.设$\psi(0)\in S_n$.若$n=0$,则$\psi(0)$就是$S$中的右零元.设$n\geqslant 1$.不妨假定$\psi(0)\in S_n-S_{n-1}$.因为$S_n=(S_{n-1}\cup F_{n-1})/\lambda(H_{n-1})$,所以$\psi(0)=[tx_\sigma]_{n-1}$,这里$\{x_\sigma|\sigma\in\Sigma_{n-1}\}$是$F_{n-1}$的自由基, $\sigma\in\Sigma_{n-1},t\in S$.设$\sigma=(a,u),u\in S,a\in S_{n-1}$.设$t\in Su$,则存在$v\in S$使得$t=vu$.所以$\psi(0)=[tx_\sigma]_{n-1}=[vux_\sigma]_{n-1}$.因为$(a,ux_\sigma)\in H_{n-1}$,所以$\psi(0)=[va]_{n-1}\in S_{n-1}$.矛盾.所以$t\notin Su$.

对于任意$s\in S$,由$\psi(0)=s\psi(0)$可知有

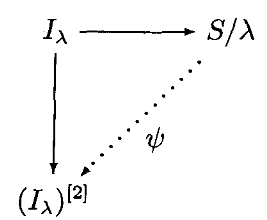
$$[stx_\sigma]_{n-1}=[tx_\sigma]_{n-1}.$$

所以存在$t_1,\cdots,t_p\in S$使得

$$stx_\sigma=t_1b_1,t_1d_1=t_2b_2,\cdots,t_pd_p=tx_\sigma,$$

这里$(b_i,d_i)\in H_{n-1}$或$(d_i,b_i)\in H_{n-1},i=1,\cdots,p$,或者$stx_\sigma=tx_\sigma$.由$t_pd_p=tx_\sigma$可知$d_p=ux_\sigma$,所以$t_pux_\sigma=tx_\sigma$,故$t=t_pu\in Su$,矛盾.所以有$stx_\sigma=tx_\sigma$,故$t=st$.这说明$t$是$S$的右零元.

设λ 是S的任意左同余, $I=Ss$是S的主左理想.则$I_\lambda=\{a\lambda|a\in I\}$是$S/\lambda$的$S$ -子系.构造主弱内射S -系$(I_\lambda)^{[2]}$,由条件知$(I_\lambda)^{[2]}$ 是内射的,所以存在S -同态$\psi:S/\lambda\longrightarrow(I_\lambda)^{[2]}$使得下图可换:



对任意$(h,k)\in\lambda$,我们有

$$h\psi(1\lambda)=\psi(h\lambda)=\psi(k\lambda)=k\psi(1\lambda).$$

又显然有

$$s\lambda=\psi(s\lambda)=\psi(s(1\lambda))=s\psi(1\lambda).$$

设$\psi(1\lambda)\in I_\lambda$, 则存在 $u'\in I$ 使得 $\psi(1\lambda)=u'\lambda$. 设$u'=us$,则$s\lambda=sus\lambda$,即$sus\lambda s$,又对任意$(h,k)\in\lambda$,有$hus\lambda kus$.令$n=1,p_1=q_1=1,r_1=s,t=s$,则容易验证条件(CI) 成立.

设$\psi(1\lambda)\in(I_\lambda)_n,n\geqslant1$.因为

$$(I_\lambda)_n=((I_\lambda)_{n-1}\cup F_{n-1})/\lambda(H_{n-1}),$$

所以$\psi(1\lambda)=[p_1x_\sigma]_{n-1}$或$\psi(1\lambda)=[m]_{n-1}$,这里$\sigma\in\Sigma_{n-1},p_1\in S,m\in(I_\lambda)_{n-1}$.因为$(m,1)\in\Sigma_{n-1}$,所以若令$\tau=(m,1)$,则有$(m,x_\tau)\in H_{n-1}$,因此

$$\psi(1\lambda)=[m]_{n-1}=[x_\tau]_{n-1}.$$

所以我们总可以假定$\psi(1\lambda)=[p_1x_\sigma]_{n-1}$,这里$\{x_\sigma|\sigma\in\Sigma_{n-1}\}$是$F_{n-1}$的自由基.

设$h,k\in S$使得$h\lambda k$.则$h\psi(1\lambda)=k\psi(1\lambda)$,因此有

$$[hp_1x_\sigma]_{n-1}=[kp_1x_\sigma]_{n-1}.$$

所以$hp_1x_\sigma = kp_1x_\sigma$,或者存在$t_1,\cdots,t_l \in S$使得:

$$hp_1x_\sigma = t_1c_1, t_1d_1 = t_2c_2, \cdots, t_ld_l = kp_1x_\sigma,$$

这里$(c_i,d_i) \in H_{n-1}$或$(d_i,c_i) \in H_{n-1}, i = 1,\cdots,l$.

设$\sigma = (m_1,q_1) \in \Sigma_{n-1}$,这里$q_1 \in S, m_1 \in (I_\lambda)_{n-1}$.则有$hp_1 = kp_1$或

$$hp_1 = t_1q_1, t_1m_1\lambda(H_{n-1})t_lm_1, t_lq_1 = kp_1.$$

由$t_1m_1, t_lm_1 \in (I_\lambda)_{n-1}$且$t_1m_1\lambda(H_{n-1})t_lm_1$即可得$t_1m_1 = t_lm_1$.定义$S$上的左同余$\lambda_1$为

$$\lambda_1 = \mathrm{ann}(m_1).$$

因此有$hp_1 = kp_1$或

$$hp_1 = t_1q_1, t_1\lambda_1t_l, t_lq_1 = kp_1.$$

所以 $p_1 \in \mathrm{Ann}(\lambda_0, q_1, \lambda_1)$, 这里 $\lambda_0 = \lambda$. 如果 $(h,k) \in \mathrm{ann}(q_1)$, 则 $hq_1 = kq_1$, 由于 $m_1 \in (I_\lambda)_{n-1}$, 所以易知$hm_1 = km_1$. 因此有$(h,k) \in \mathrm{ann}(m_1) = \lambda_1$. 所以$\mathrm{ann}(q_1) \subseteq \lambda_1$.

因为

$$[s\lambda]_{n-1} = s\lambda = s\psi(1\lambda) = [sp_1x_\sigma]_{n-1},$$

而且$s\lambda \neq sp_1x_\sigma$,所以存在$r_1,\cdots,r_m \in S$使得:

$$sp_1x_\sigma = r_1c_1, r_1d_1 = r_2c_2, \cdots, r_md_m = s\lambda,$$

这里(c_i,d_i)或$(d_i,c_i) \in H_{n-1}, i = 1,\cdots,m$.由此即得:

$$sp_1 = r_1q_1,\ r_1m_1 = s\lambda.$$

设$m_1 = [p_2y_\tau]_{n-2}$或$m_1 = [m]_{n-2}$,这里$m \in (I_\lambda)_{n-2}, p_2 \in S, \tau \in \Sigma_{n-2}, \{y_\tau \mid \tau \in \Sigma_{n-2}\}$是$F_{n-2}$的自由基.和前面的讨论类似地可知我们可以假定$m_1$具有形式

$$m_1 = [p_2y_\tau]_{n-2}.$$

设$\tau = (m_2,q_2) \in \Sigma_{n-2}$,这里$m_2 \in (I_\lambda)_{n-2}, q_2 \in S$.定义

$$\lambda_2 = \mathrm{ann}(m_2),$$

则λ_2是S上的左同余.

设$h\lambda_1k$,则$hm_1 = km_1$,即$[hp_2y_\tau]_{n-2} = [kp_2y_\tau]_{n-2}$.所以类似于前面的讨论可以证明$hp_2 = kp_2$或者存在$t,t' \in S$使得

$$hp_2 = tq_2, t\lambda_2t', t'q_2 = kp_2.$$

因此有$p_2 \in \mathrm{Ann}(\lambda_1, q_2, \lambda_2)$.由于$(m_2, q_2) = \tau \in \Sigma_{n-2}$,所以类似于前面的证明可知有$\mathrm{ann}(q_2) \subseteq \lambda_2$.再由$[s\lambda]_{n-2} = [r_1 p_2 y_\tau]_{n-2}$ 以及$s\lambda \neq r_1 p_2 y_\tau$可得

$$r_1 p_2 = r_2 q_2,\ \ r_2 m_2 = s\lambda,$$

这里$r_2 \in S$.

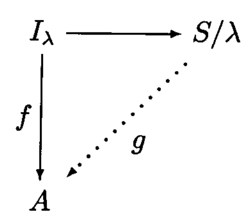
继续上述过程,可知存在元素$p_i, q_i, r_i \in S, m_i \in (I_\lambda)_{i-1} (1 \leqslant i \leqslant n)$满足

$$\begin{aligned} &sp_1 = r_1 q_1, \\ &r_i p_{i+1} = r_{i+1} q_{i+1}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1. \end{aligned}$$

定义$\lambda_0 = \lambda, \lambda_i = \mathrm{ann}(m_i)$,则有$\mathrm{ann}(q_i) \subseteq \lambda_i, p_i \in \mathrm{Ann}(\lambda_{i-1}, q_i, \lambda_i)(1 \leqslant i \leqslant n)$,且$r_n m_n = s\lambda$,这里$m_n \in I_\lambda$.因此存在$u \in S$使得$m_n = us\lambda$.所以$s\lambda = r_n(us\lambda) = (r_n us)\lambda$,即$s\lambda r_n us$.又显然有$(h,k) \in \lambda_n \Longleftrightarrow hm_n = km_n \Longleftrightarrow hus\lambda = kus\lambda \Longleftrightarrow hus\lambda kus$.

这就证明了S满足条件(CI).

(2)$\Longrightarrow$(1) 设S是含有右零元的主左理想幺半群,且满足条件(CI).设A是任意主弱内射S -系.我们首先证明对于S的任意主左理想$I = Ss$,任意S -同态$f : I_\lambda \longrightarrow A$,存在$S$ -同态$g : S/\lambda \longrightarrow A$使得下图可换:



这里λ 是S上的任意左同余.

由题设条件知存在自然数n,元素$u, p_i, q_i, r_i \in S$,以及S上的左同余$\lambda_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 满足条件(CI).

如下定义映射$f_n : Sq_n \longrightarrow A$:

$$f_n(tq_n) = f(tus\lambda),\quad \forall t \in S.$$

设$tq_n = t'q_n$,则$(t,t') \in ann(q_n) \subseteq \lambda_n$.而由条件知$\lambda_n = \{(h,k) | hus\lambda kus\}$,所以$tus\lambda t'us$,因此$f(tus\lambda) = f(t'us\lambda)$,即$f_n$是有定义的.显然$f_n$还是$S$ -同态.因为A是主弱内射的,所以存在S -同态$\overline{f_n} : S \longrightarrow A$使得$\overline{f_n}|_{Sq_n} = f_n$.如下定义映射$\alpha_n : S/\lambda_{n-1} \longrightarrow A$:

$$\alpha_n(t\lambda_{n-1}) = \overline{f_n}(tp_n), \qquad \forall t \in S.$$

设$t\lambda_{n-1}t'$.因为$p_n \in \mathrm{Ann}(\lambda_{n-1}, q_n, \lambda_n)$,所以有

$$tp_n = t'p_n, \tag{3.10.1}$$

或者

$$tp_n = vq_n, v\lambda_n v', v'q_n = t'p_n, \tag{3.10.2}$$

这里$v, v' \in S$.如果式(3.10.1)成立,则$\overline{f_n}(tp_n) = \overline{f_n}(t'p_n)$.如果式(3.10.2)成立,则由$\lambda_n$ 的定义可知$vus\lambda v'us$,因此,

$$\begin{aligned}\alpha_n(t\lambda_{n-1}) &= \overline{f_n}(tp_n) = \overline{f_n}(vq_n) = f_n(vq_n)\\ &= f(vus\lambda) = f(v'us\lambda) = f_n(v'q_n)\\ &= \overline{f_n}(v'q_n) = \overline{f_n}(t'p_n) = \alpha_n(t\lambda_{n-1}),\end{aligned}$$

所以α_n是有定义的.显然α_n是S -同态.

如下定义映射$f_{n-1} : Sq_{n-1} \longrightarrow A$:

$$f_{n-1}(tq_{n-1}) = \alpha_n(t\lambda_{n-1}), \qquad \forall t \in S.$$

设$tq_{n-1} = t'q_{n-1}$,则$(t, t') \in \mathrm{ann(q_{n-1})} \subseteq \lambda_{n-1}$,所以$f_{n-1}$是有定义的$S$ -同态.由于A是主弱内射的,所以存在S -同态$\overline{f_{n-1}} : S \longrightarrow A$, 使得$\overline{f_{n-1}}|_{Sq_{n-1}} = f_{n-1}$.

定义映射$\alpha_{n-1} : S/\lambda_{n-2} \longrightarrow A$:

$$\alpha_{n-1}(t\lambda_{n-2}) = \overline{f_{n-1}}(tp_{n-1}), \quad \forall\, t \in S.$$

设$t\lambda_{n-2} = t'\lambda_{n-2}$,则$t\lambda_{n-2}t'$.所以有$tp_{n-1} = t'p_{n-1}$ 或者存在$v, v' \in S$使得

$$tp_{n-1} = vq_{n-1}, v\lambda_{n-1}v', v'q_{n-1} = t'p_{n-1}.$$

如果$tp_{n-1} = t'p_{n-1}$,则$\overline{f_{n-1}}(tp_{n-1}) = \overline{f_{n-1}}(t'p_{n-1})$.否则有:

$$\begin{aligned}\alpha_{n-1}(t\lambda_{n-2}) &= \overline{f_{n-1}}(tp_{n-1}) = \overline{f_{n-1}}(vq_{n-1}) = f_{n-1}(vq_{n-1})\\ &= \alpha_n(v\lambda_{n-1}) = \alpha_n(v'\lambda_{n-1}) = f_{n-1}(v'q_{n-1})\\ &= \overline{f_{n-1}}(v'q_{n-1}) = \overline{f_{n-1}}(t'p_{n-1}) = \alpha_{n-1}(t'\lambda_{n-2}).\end{aligned}$$

这说明α_{n-1}是有定义的S -同态.

继续上述过程,我们可得到S -同态$f_i : Sq_i \longrightarrow A, \overline{f_i} : S \longrightarrow A, \alpha_i : S/\lambda_{i-1} \longrightarrow A (1 \leqslant i \leqslant n)$, 使得:

$$\begin{aligned}f_n(tq_n) &= f(tus\lambda), && \forall t \in S,\\ f_i(tq_i) &= \alpha_{i+1}(t\lambda_i), && \forall\, t \in S, 1 \leqslant i \leqslant n-1,\\ \overline{f_i}|_{Sq_i} &= f_i, && 1 \leqslant i \leqslant n,\\ \alpha_i(t\lambda_{i-1}) &= \overline{f_i}(tp_i), && \forall\, t \in S, 1 \leqslant i \leqslant n.\end{aligned}$$

所以可令$g = \alpha_1 : S/\lambda_0 = S/\lambda \longrightarrow A$.下面证明$g$是$f$的扩张.事实上,

$$\begin{aligned} g(s\lambda) &= \alpha_1(s\lambda) = \alpha_1(s\lambda_0) = \overline{f_1}(sp_1) = \overline{f_1}(r_1q_1) \\ &= f_1(r_1q_1) = \alpha_2(r_1\lambda_1) = \overline{f_2}(r_1p_2) = \overline{f_2}(r_2q_2) \\ &= f_2(r_2q_2) = \alpha_3(r_2\lambda_2) = \cdots = \alpha_n(r_{n-1}\lambda_{n-1}) \\ &= \overline{f_n}(r_{n-1}p_n) = \overline{f_n}(r_nq_n) = f_n(r_nq_n) \\ &= f(r_nus\lambda) = f(tus\lambda) = f(s\lambda), \end{aligned}$$

所以对任意$t \in S, ts \in I, g(ts\lambda) = tg(s\lambda) = tf(s\lambda) = f(ts\lambda)$, 因此$g|_{I_\lambda} = f$.

设M是任意S -系, $N \leqslant M, \phi : N \longrightarrow A$是$S$ -同态.在集合

$$\mathscr{D} = \{(N', \phi') | N \leqslant N' \leqslant M,\ \phi' \in \mathrm{Hom}_S(N', A)且\phi'|_N = \phi\}$$

上定义如下的偏序:

$$(N', \phi') \leqslant (N'', \phi'') \Longleftrightarrow N' \leqslant N'', \phi''|_{N'} = \phi'.$$

由Zorn引理知$\mathscr{D}$中有极大元,设其为(P, θ).下证$P = M$.反设$P \neq M$,则存在$m \in M - P$.令$I = \{s \in S | sm \in P\}$.

设$I = \varnothing$,则$Sm \cap P = \varnothing$.如下定义映射$\alpha : Sm \cup P \longrightarrow A$:

$$\alpha(sm) = s_0a, \qquad \forall s \in S,$$
$$\alpha(p) = \theta(p), \qquad \forall p \in P,$$

这里s_0是S的右零元, a是A中任意固定的元.显然$\alpha(tsm) = s_0a = ts_0a = t\alpha(sm)$,所以$\alpha$是$S$ -同态且$\alpha|_P = \theta$,故$(P, \theta) \leqslant (Sm \cup P, \alpha)$而$(P, \theta) \neq (Sm \cup P, \alpha)$.和$(P, \theta)$的极大性矛盾.

设$I \neq \varnothing$.由条件知I是主左理想,故不妨设$I = Ss$.在S上定义左同余λ:

$$h\lambda k \Longleftrightarrow hm = km,$$

即$\lambda = \mathrm{ann}(m)$.定义映射$\psi : I_\lambda \longrightarrow A$:

$$\psi(ts\lambda) = \theta(tsm), \quad \forall t \in S.$$

显然ψ是有定义的S -同态.所以由已证的结果知存在S -同态$\mu : S/\lambda \longrightarrow A$使得$\mu|_{I_\lambda} = \psi$.如下定义映射$\alpha : Sm \cup P \longrightarrow A$:

$$\begin{aligned} \alpha(tm) &= \mu(t\lambda), & \forall t \in S, \\ \alpha(p) &= \theta(p), & \forall\, p \in P. \end{aligned}$$

如果$tm = t'm$,则$t\lambda t'$,故$\mu(t\lambda) = \mu(t'\lambda)$.如果$tm = p \in P$,则$t \in I$,所以存在$t' \in S$使得$t = t's$.因此,

$$\begin{aligned}\alpha(tm) &= \mu(t\lambda) = \mu(t's\lambda) = \psi(t's\lambda) \\ &= \theta(t'sm) = \theta(tm) = \theta(p) \\ &= \alpha(p).\end{aligned}$$

所以α是有定义的,且是S -同态.故$(P,\theta) \leqslant (Sm \cup P, \alpha)$而$(P,\theta) \neq (Sm \cup P, \alpha)$,矛盾. 上述矛盾说明只能有$P = M$.所以$A$是内射的.这就证明了任意主弱内射$S$ -系是内射的. □

引理 3.10.10 设Ss是S的主左理想,λ 是S上的左同余. 设n是自然数,且存在S的元素u, p_i, q_i, r_i以及S上的左同余$\lambda_i (1 \leqslant i \leqslant n)$满足条件(CI).若$q_1, \cdots, q_n$都是正则元,则存在$S$的元素$x$满足下述条件: 任意$h, k \in S, h\lambda k \Longrightarrow hxus\lambda kxus$;任意$t \in S, ts\lambda tsxus$.

证明 记$I = Ss$.对任意$i \in \{1, \cdots, n\}$,设$q_i = q_i q_i' q_i$.我们先证明对任意$h, k \in S$,

$$h\lambda_{i-1}k \Longrightarrow hp_i q_i' \lambda_i kp_i q_i'.$$

因为$q_i q_i' q_i = q_i$,所以$(q_i q_i', 1) \in \mathrm{ann}(q_i)$,故$q_i q_i' \lambda_i 1$.因为$p_i \in \mathrm{Ann}(\lambda_{i-1}, q_i, \lambda_i)$,所以有$hp_i = kp_i$,或者存在$h', k' \in S$ 使得:

$$hp_i = h'q_i, h'\lambda_i k', k'q_i = kp_i.$$

若$hp_i = kp_i$,则$hp_i q_i' = kp_i q_i'$,当然有$hp_i q_i' \lambda_i kp_i q_i'$.若后一种情形出现,则有:

$$hp_i q_i' = h' q_i q_i' \lambda_i h' \lambda_i k' \lambda_i k' q_i q_i' = kp_i q_i'.$$

因此,对于任意 $h, k \in S$, 若$h\lambda k$, 则由上述结果知有$hx\lambda_n kx$, 这里$x = p_1 q_1' p_2 q_2' \cdots p_n q_n'$,从而有$hxus\lambda kxus$.

显然$s\lambda_0 s$,所以由上述结果知有$sp_1 q_1' \lambda_1 sp_1 q_1'$.而$sp_1 = r_1 q_1$,所以有$r_1 q_1 q_1' \lambda_1 \cdot sp_1 q_1'$.又由于$q_1 q_1' \lambda_1 1$,所以有

$$r_1 \lambda_1 r_1 q_1 q_1' \lambda_1 sp_1 q_1',$$

因此$r_1 p_2 q_2' \lambda_2 sp_1 q_1' p_2 q_2'$.再由$r_1 p_2 = r_2 q_2$可得$r_2 q_2 q_2' \lambda_2 sp_1 q_1' p_2 q_2'$.利用$q_2 q_2' \lambda_2 1$即得

$$r_2 \lambda_2 sp_1 q_1' p_2 q_2'.$$

继续上述过程,即得$r_n \lambda_n sp_1 q_1' p_2 q_2' \cdots p_n q_n' = sx$,所以由$\lambda_n$的定义即知有$r_n us\lambda sxus$.再由$r_n = t$以及$s\lambda tus$即得$s\lambda sxus$.所以结论成立. □

由定理3.10.9及引理3.10.10可以导出推论3.3.11的结论,即S是完全左内射幺半群当且仅当S 中含有右零元,且对于S的任意左理想I和任意左同余λ,存在$y \in I$使得对于任意$t \in I, ty\lambda t$,且对任意$h, k \in S, h\lambda k \Longrightarrow hy\lambda ky$.其证明过程如下.

证明 设S是完全左内射幺半群,则所有主弱内射S -系是内射的.因此S含有右零元,且所有左理想都是主左理想, S满足条件(CI).又显然所有左S -系都是主弱内射的,从而S是正则幺半群.

设I是S的任意左理想, λ 是S的任意左同余,则存在$s \in S$使得$I = Ss$.由引理3.10.10知存在$x \in S$,使得对任意$h, k \in S, h\lambda k \Longrightarrow hxus\lambda kxus$;且对任意$t \in I, t\lambda txus$.令$y = xus$,则$y \in I$.结论显然成立.

反过来,容易证明S是主左理想幺半群.类似于定理3.10.9的证明可知S满足条件(CI). 所以由定理3.10.9知所有主弱内射S -系是内射的.易知S是正则幺半群,所以所有左S -系是主弱内射的.由此即得所有S -系是内射的,即S是完全左内射幺半群. □

下面给出例子说明存在幺半群S,其上的所有主弱内射S -系是内射的,但S不是完全左内射的.

例 3.10.11 设S是由元素a生成的无限循环幺半群,则所有主弱内射S^0-系是内射的,但S^0不是完全左内射的.

证明 S^0中的正则元只有两个: 0和$1 = a^0$,所以S^0不是正则幺半群,从而不是完全左内射幺半群.

显然S^0是交换的主理想幺半群,且没有零因子.

设$s \in S^0, \lambda$ 是S^0上的左同余.如果$s = 0$,则取$n = 1$,令$p_1 = q_1 = u = 1, r_1 = 0$,显然有$sp_1 = r_1q_1, r_1us = 0$, 从而$s\lambda r_1us$.若$(h, k) \in \mathrm{ann}(q_1)$,则$h = k$, 所以$\mathrm{ann}(q_1)$包含在$S$的任意同余中.令$\lambda_1 = \{(h, k)|hus\lambda kus\}$.因为$s = 0$,所以$\lambda_1 = S^0 \times S^0$.如果$h, k \in S^0$, 使得$h\lambda k$,则$h1 = h1, h\lambda_1 k, k1 = k1$,所以$1 \in \mathrm{Ann}(\lambda, 1, \lambda_1)$.

因此下面假定$s \neq 0$.设$\lambda = 1_{S^0}$,则可取$n = 1, p_1 = r_1 = u = 1, q_1 = s, \lambda_1 = \{(h, k)|hs\lambda ks\}$.显然$\lambda_1 = \{(h, k)|hs = ks\} = \{(h, k)|h = k\} = 1_{S^0}, sp_1 = r_1q_1, s\lambda r_1us$.又$\mathrm{ann}(q_1) = \mathrm{ann}(s) = 1_{S^0}$,所以$\mathrm{ann}(q_1) \subseteq \lambda_1$.因为$\lambda = 1_{S^0}$,所以有$1 \in \mathrm{Ann}(\lambda, s, \lambda_1)$.

下面我们假定$\lambda \neq 1_{S^0}$.此时存在$t, z \in S^0$使得$t \neq z$,但$t\lambda z$.不妨设S^0t是具有上述性质的元素t所生成的主理想中的极大者.显然$t \neq 0$(否则$\lambda = 1_{S^0}$).如果$z = 0$,则$t\lambda 0$,因此$0\lambda t^2$,所以$t^2\lambda t$.显然$t^2 = t$的充要条件是$t = 1$.如果$t = 1$,则$1\lambda 0$,所以对任意$b \in S^0$,有$b\lambda 0$.因此$\lambda = S^0 \times S^0$.此时令$n = 1, p_1 = q_1 = r_1 = u = 0, \lambda_1 = S^0 \times S^0$,则容易验证条件(CI)成立.

因此我们以下假定$s \neq 0, \lambda \neq 1_{S^0}, \lambda \neq S^0 \times S^0$,且存在非零元素$t, z \in S$使得$t \neq z$,但$t\lambda z$,而$S^0t$是具有上述性质的元素$t$所生成的主理想中的极大者.

因为S^0是主理想幺半群,所以或者$S^0s \subseteq S^0t$,或者$S^0t \subseteq S^0s$.设$S^0t \subseteq S^0s$.令$n = 1, p_1 = r_1 = u = 1, q_1 = s$,则显然有$sp_1 = r_1q_1, s\lambda r_1us$.令$\lambda_1 = \{(h,k)|hs\lambda ks\}$,则$\mathrm{ann}(q_1) = \mathrm{ann}(s) = 1_{S^0}$,所以$\mathrm{ann}(q_1) \subseteq \lambda_1$.设$v, v' \in S^0$使得$v\lambda v'$.如果$v = v'$,则$v1 = v'1$.如果$v \neq v'$,则$v, v' \in S^0t$(利用$S^0t$的极大性以及$S^0$是主理想幺半群).所以$v, v' \in S^0s$.故存在$h, k \in S^0$使得$v = hs, v' = ks$.因此由$hs\lambda ks$即得$(h,k) \in \lambda_1$.所以$1 \in \mathrm{Ann}(\lambda, s, \lambda_1)$.即条件(CI)被满足.

设$S^0s \subseteq S^0t$.显然存在自然数c, d, e, 使得

$$t = a^c, \quad z = a^d, \quad d = c + e, \quad e > 0.$$

由$t\lambda a^d = ta^e$易知$t\lambda a^{c+me}$,这里m是任意自然数.所以我们可以选取$w \in S$使得$t\lambda w$,且$S^0w \subseteq S^0s \subseteq S^0t$.

设$y, k \in S$使得$s = yt, w = ks$.则$s\lambda yw$且$yw = yks$.令$n = 2, u = 1, p_1 = 1, q_1 = t, r_1 = y, p_2 = w, q_2 = s, r_2 = yk, \lambda_1 = \{(h,h')|ht\lambda h't\}, \lambda_2 = \{(h,h')|hs\lambda h's\}$.则有:

$$sp_1 = s = yt = r_1q_1,$$
$$r_1p_2 = yw = yks = r_2q_2,$$
$$r_2us = yks = yw\lambda s.$$

由于$q_1 \neq 0, q_2 \neq 0$,所以$\mathrm{ann}(q_1) \subseteq \lambda_1, \mathrm{ann}(q_2) \subseteq \lambda_2$.

设$v, v' \in S^0$使得$v \neq v'$但$v\lambda v'$.则存在$h, h' \in S^0$使得$v = ht, v' = h't$.所以由$ht\lambda h't$可得$(h,h') \in \lambda_1$.因此$1 \in \mathrm{Ann}(\lambda, t, \lambda_1)$,即$p_1 \in \mathrm{Ann}(\lambda_0, q_1, \lambda_1)$.

设$v, v' \in S^0$使得$v\lambda_1 v'$,则$vt\lambda v't$.由于$S^0w \subseteq S^0t$,所以有$vw\lambda v'w$.因为$vw = vks, v'w = v'ks$,所以有$vks\lambda v'ks$,因此$vk\lambda_2 v'k$.这说明$w \in \mathrm{Ann}(\lambda_1, s, \lambda_2)$,即$p_2 \in \mathrm{Ann}(\lambda_1, q_2, \lambda_2)$.

总之,我们证明了S^0满足条件(CI).所以由定理3.10.9知所有主弱内射S-系是内射的. □

§3.11 可 除 系

本节讨论主弱内射系的推广–可除S-系,其主要结果选自文献[98].

定义 3.11.1 设A是S-系.称A是可除的,如果对于S的任意右可消元s,有$sA = A$.

定理 3.11.2 任意主弱内射系是可除的.

证明　设A是主弱内射系, s是S的任意右可消元,我们要证明$sA = A$.为此,任取$a \in A$,考虑方程$sx = a$.设$h, k \in S$使得$hs = ks$,则由s的右可消性知$h = k$,所以$ha = ka$.这说明方程$sx = a$是容许的.因为A是主弱内射的,所以由命题3.8.10知方程$sx = a$在A中有解,即存在$b \in A$使得$sb = a$.由a的任意性即知$sA = A$. □

下面的定理3.11.4将说明可除性不必是主弱内射的.

定义 3.11.3　设S是幺半群, $s \in S$.称s是左几乎正则的,如果存在$r, r_1, \cdots, r_m$, $s_1, \cdots, s_m \in S$和S的右可消元$c_1, \cdots, c_m \in S$,使得:

$$s = s_1 r s,$$

$$s_1 c_1 = s_2 r_1, s_2 c_2 = s_3 r_2, \cdots, s_m c_m = s r_m.$$

若S中的所有元素都是左几乎正则的,则称S是左几乎正则幺半群.

设$s \in S$是正则元,则存在$s' \in S$使得$s = ss's$.令$s_1 = s, r = s', c_1 = 1, r_1 = 1$,则$s = s_1 r s, s_1 c_1 = s r_1$.所以正则元是左几乎正则的,从而正则幺半群是左几乎正则的.设$s \in S$是右可消元.令$c_1 = s, r = s_1 = r_1 = 1$,则$s = s_1 r s, s_1 c_1 = s r_1$,所以右可消元也是左几乎正则元,从而右可消幺半群就是左几乎正则幺半群.

定理 3.11.4　如下两条是等价的:

(1) 所有可除S -系是主弱内射的;

(2) S是左几乎正则的.

证明　(1)$\Longrightarrow$(2) 记C为S的所有右可消元构成的集合.设A是任意S -系,规定:

$$\Sigma_0 = A \times C.$$

以Σ_0为自由基作自由左S -系$F_0 = \cup_{\sigma \in \Sigma_0} S x_\sigma$.再定义:

$$\begin{aligned} K_0 &= \{(a, c x_\sigma) | \sigma = (a, c) \in \Sigma_0\}, \\ A_1 &= (A \cup F_0)/\lambda(K_0). \end{aligned}$$

显然A_1是左S -系.设$a_1, a_2 \in A$,使得在A_1中有$[a_1] = [a_2]$,则$a_1 = a_2$或存在$t_1, \cdots, t_n \in S$使得:

$$a_1 = t_1 b_1, t_1 d_1 = t_2 b_2, \cdots, t_n d_n = a_2,$$

这里(b_i, d_i)或$(d_i, b_i) \in K_0, i = 1, \cdots, n$.由$K_0$的特点可知$n$一定是偶数.下面用数学归纳法证明$a_1 = a_2$.

设$n = 2$.此时有

$$a_1 = t_1 b_1, t_1 d_1 = t_2 b_2, t_2 d_2 = a_2.$$

显然$b_1 \in A$,所以$d_1 = cx_\sigma$,其中$\sigma = (b_1, c) \in \Sigma_0$.因此$b_2 = cx_\sigma, d_2 = b_1$.从$t_1cx_\sigma = t_2cx_\sigma$可得$t_1c = t_2c$. 又$c$是右可消元,所以$t_1 = t_2$.因此有:

$$a_1 = t_1b_1 = t_2b_1 = t_2d_2 = a_2.$$

设$n > 2$.和上面的证法类似地可以证明$a_1 = t_3b_3$.所以有

$$a_1 = t_3b_3,\ t_3d_3 = t_4b_4,\ \cdots,\ t_nd_n = a_2.$$

由归纳假定即知有$a_1 = a_2$.

因此,自然同态$f: A \longrightarrow A_1 : a \longrightarrow [a]$就把$A$同构地嵌入到$A_1$中.如果我们把$a$和$[a]$等同起来,则可以把$A$看成是$A_1$的$S$ -子系.

用类似的方法可以构造$\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, F_1, F_2, \cdots, K_1, K_2, \cdots$,以及$S$ - 系$A_1 \leqslant A_2 \leqslant \cdots$.记$A_0 = A$,令

$$\overline{A} = \cup_{i=0}^{\infty} A_i.$$

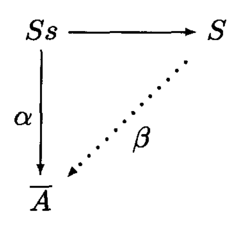
下面证明$\overline{A}$是可除系.

为了方便,我们记$A_n \cup F_n$中的元素a所在的$\lambda(K_n)$-类为$[a]_n$.设$c \in C$, $\overline{a} \in \overline{A}$.则存在$n$使得$\overline{a} \in A_n$.所以$\sigma = (\overline{a}, c) \in \Sigma_n$,从而$(\overline{a}, cx_\sigma) \in K_n$,因此在$A_{n+1}$中有

$$\overline{a} = [\overline{a}]_n = [cx_\sigma]_n = c[x_\sigma]_n.$$

而$[x_\sigma]_n \in A_{n+1}$,故$c\overline{A} = \overline{A}$.这即证明了$\overline{A}$是可除的.

设$s \in S$,令$A = Ss$.因为$\overline{A}$ 是可除S -系,所以是主弱内射的.因此对于自然的包含同态$\alpha : Ss \longrightarrow \overline{A}$,存在$S$ -同态$\beta : S \longrightarrow \overline{A}$使得下图可换:



所以$s = \alpha(s) = \beta(s) = s\beta(1)$.设$\beta(1) \in A_n$.如果$n = 0$,则$\beta(1) \in Ss$,故$s$是正则元,因此是左几乎正则的.下设$n \geqslant 1$.

因为$A_n = (A_{n-1} \cup F_{n-1})/\lambda(K_{n-1})$,所以$\beta(1) = [m_{n-1}]_{n-1}$,或者$\beta(1) = [r_nx_\sigma]_{n-1}$,这里$m_{n-1} \in A_{n-1}, \sigma = (a_{n-1}, c_n) \in \Sigma_{n-1}, a_{n-1} \in A_{n-1}, r_n \in S$.因为$(m_{n-1}, 1) \in A_{n-1} \times C = \Sigma_{n-1}$,所以$(m_{n-1}, x_\tau) \in K_{n-1}$,因此$[m_{n-1}]_{n-1} = [x_\tau]_{n-1}$,这里$\tau = (m_{n-1}, 1)$.故有

$$\beta(1) = [m_{n-1}]_{n-1} = [x_\tau]_{n-1}.$$

所以总可以假定$\beta(1) = [r_n x_\sigma]_{n-1}$.因此

$$[s]_{n-1} = s = s\beta(1) = [sr_n x_\sigma]_{n-1},$$

即$(sr_n x_\sigma, s) \in \lambda(K_{n-1})$.所以存在$t_1, \cdots, t_p \in S$使得

$$sr_n x_\sigma = t_1 b_1, t_1 d_1 = t_2 b_2, \cdots, t_p d_p = s,$$

其中$(b_i, d_i) \in K_{n-1}$或$(d_i, b_i) \in K_{n-1}$.显然$b_1 = c_n x_\sigma, d_1 = a_{n-1}$.所以$sr_n = t_1 c_n$.和前面的证明类似地可知$t_1 d_1 = s$.

如果$n = 1$,那么$A_{n-1} = A_0 = Ss$.所以存在$r \in S$使得$a_{n-1} = rs$.故有

$$s = t_1 rs, \quad t_1 c_n = sr_n,$$

即s是左几乎正则元.设$n \geqslant 2$,则$a_{n-1} \in A_{n-1} = (A_{n-2} \cup F_{n-2})/\lambda(K_{n-2})$.同上,可以假设$a_{n-1} = [r_{n-1} x_{\sigma_1}]_{n-2}$,其中$r_{n-1} \in S, \sigma_1 = (a_{n-2}, c_{n-1}) \in \Sigma_{n-2}$.所以有

$$[s]_{n-2} = s = t_1 a_{n-1} = [t_1 r_{n-1} x_{\sigma_1}]_{n-2}.$$

故$(t_1 r_{n-1} x_{\sigma_1}, s) \in \lambda(K_{n-2})$.因此存在$u_1, \cdots, u_q \in S$使得

$$t_1 r_{n-1} x_{\sigma_1} = u_1 b_1, u_1 d_1 = u_2 b_2, \cdots, u_q d_q = s,$$

其中$(b_i, d_i) \in K_{n-2}$或$(d_i, b_i) \in K_{n-2}, i = 1, \cdots, q$.显然$b_1 = c_{n-1} x_{\sigma_1}, d_1 = a_{n-2}$.所以$t_1 r_{n-1} = u_1 c_{n-1}, s = u_1 d_1 = u_1 a_{n-2}$.

如果$n = 2$,则$s = u_1 r_1 s$,这里$r_1 \in S$.所以有:

$$s = u_1 r_1 s, u_1 c_{n-1} = t_1 r_{n-1}, t_1 c_n = sr_n,$$

即s是左几乎正则元.

如果$n \geqslant 3$,则继续使用上面的讨论方法即可证明s是左几乎正则的.

(2)$\Longrightarrow$(1) 设A是可除S -系, $s \in S, g: Ss \longrightarrow A$是$S$ -同态.因为s是左几乎正则元, 所以存在$r, r_1, \cdots, r_m, s_1, \cdots, s_m \in S$和$S$的右可消元$c_1, \cdots, c_m$,使得

$$s = s_1 rs,$$

$$s_1 c_1 = s_2 r_1, s_2 c_2 = s_3 r_2, \cdots, s_m c_m = sr_m.$$

所以$g(s) = g(s_1 rs) = s_1 g(rs)$.由于$A$是可除的,所以对于$c_1 \in C$,存在$a_1 \in A$使得$g(rs) = c_1 a_1$,所以

$$g(s) = s_1 c_1 a_1 = s_2 r_1 a_1.$$

对于$c_2 \in C$,存在$a_2 \in A$使得$r_1 a_1 = c_2 a_2$,所以

$$g(s) = s_2 c_2 a_2 = s_3 r_2 a_2.$$

这个过程一直可以进行下去.最后可得

$$g(s) = s r_m a_m.$$

因此对任意$t \in S$,有

$$g(ts) = tg(s) = tsr_m a_m.$$

定义S -同态$f : S \longrightarrow A$为$f(t) = tr_m a_m, \forall t \in S$.则$f|_{Ss} = g$.这即证明了$A$是主弱内射的. □

定理 3.11.5 以下几条是等价的:

(1) 所有S -系是可除的;

(2) S的所有左理想是可除的;

(3) ${}_SS$是可除的;

(4) 任意右可消元是右可逆的.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2)$\Longrightarrow$(3) 显然.

(3)$\Longrightarrow$(4) 设c是S的右可消元,则有$cS = S$.所以存在$c' \in S$使得$cc' = 1$.即c是右可逆的.

(4)$\Longrightarrow$(1) 设A是任意S -系, c是任意右可消元,则存在$c' \in S$使得$cc' = 1$. 所以对于任意$a \in A$,有

$$a = 1 \cdot a = c(c'a),$$

即A是可除的. □

由定理3.8.17可知所有S -系是主弱内射的当且仅当S是正则幺半群.由定理3.11.4和定理3.11.5 我们可以给出该结果的又一种证明方法.

设所有S -系是主弱内射的,则所有S -系是可除的,且所有可除S -系是主弱内射的.所以由定理3.11.4和定理3.11.5 可知S是左几乎正则幺半群且任意右可消元是右可逆元.设$s \in S$.则存在$r, r_1, \cdots, r_m, s_1, \cdots, s_m \in S, c_1, \cdots, c_m \in C$使得$s = s_1 r s, s_1 c_1 = s_2 r_1, s_2 c_2 = s_3 r_2, \cdots, s_m c_m = s r_m$.对于每个$c_i$,存在$c_i' \in S$使得$c_i c_i' = 1$.所以有

$$\begin{aligned} s &= s_1 r s = s_1 c_1 c_1' r s = s_2 r_1 c_1' r s = s_2 c_2 c_2' r_1 c_1' r s \\ &= s_3 r_2 c_2' r_1 c_1' r s = s_3 c_3 c_3' r_2 c_2' r_1 c_1' r s = \cdots \\ &= s_m c_m c_m' r_{m-1} \cdots c_3' r_2 c_2' r_1 c_1' r s \\ &= s(r_m c_m' r_{m-1} \cdots c_3' r_2 c_2' r_1 c_1' r) s, \end{aligned}$$

即s是正则元.

反之,设S是正则的,则S是左几乎正则的,且任意右可消元是右可逆的.所以由定理3.11.4和定理3.11.5即得结论.

本章讨论了内射S-系及其各种推广形式. 另外,文献[226]、[228]、[229]、[230]、[231]、[235] 等讨论了各种右自内射幺半群(即S_S是内射右S-系的幺半群),例如,右自内射正则幺半群,满足极小条件的右自内射幺半群等. 文献[220]、[221] 讨论了逆半群上的内射S-系. 文献[181]讨论了完全右FSF内射幺半群. 文献[60] 讨论了左遗传幺半群(即所有左理想皆为投射S-系的幺半群)上的内射S-系. 有兴趣的读者可直接阅读原文. 另外,关于S-系的内射包的研究可参见文献[18]、[64]、[95]、[142]、[190]等, 其中文献[95]讨论的是相对于滤子$\mathscr{P}$的$\mathscr{P}$-内射包.

第4章 平 坦 性

§4.1 函 子 $\otimes$

定义 4.1.1 设A是右S -系, B是左S -系,作卡氏积$A \times B$.令

$$H = \{((as, b), (a, sb)) | a \in A, b \in B, s \in S\},$$

记$\rho = \rho(H)$为由H生成的$A \times B$上的最小等价关系.称商集$A \times B/\rho$为A和B的张量积,记为$A \otimes B$.

对任意$a \in A, b \in B, (a, b)$所在的等价类记为$a \otimes b$.显然对任意$a \in A, b \in B, s \in S, as \otimes b = a \otimes sb$.

下面的定理可用来判断$A \otimes B$中的两个元素是否相等.

定理 4.1.2 设A是右S -系, B是左S -系, $a, a' \in A, b, b' \in B$.则在$A \otimes B$中$a \otimes b = a' \otimes b'$的充要条件是: 存在$a_1, \cdots, a_n \in A, b_2, \cdots, b_n \in B, s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$, 使得

$$\begin{aligned} & a = a_1 s_1, & & \\ & a_1 t_1 = a_2 s_2, & & s_1 b = t_1 b_2, \\ & a_2 t_2 = a_3 s_3, & & s_2 b_2 = t_2 b_3, \\ & \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ & a_n t_n = a', & & s_n b_n = t_n b'. \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

证明 规定$A \times B$上的关系σ如下: 对任意$a, a' \in A, b, b' \in B$,$(a, b)\sigma(a', b') \Leftrightarrow$ 存在$a_1, \cdots, a_n \in A$, $b_2, \cdots, b_n \in B$, $s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$,使得等式组(4.1.1)成立.下证$\sigma$是$A \times B$上的等价关系.

因为

$$\begin{aligned} & a = a \cdot 1, & & \\ & a \cdot 1 = a, & & 1 \cdot b = 1 \cdot b, \end{aligned}$$

所以$(a,b)\sigma(a,b)$.对称性是显然的.下证传递性.设$(a,b)\sigma(a',b')$, $(a',b')\sigma(a'',b'')$,则由如下等式组即知$(a,b)\sigma(a'',b'')$:

$$
\begin{aligned}
&a = a_1 s_1, && \\
&a_1 t_1 = a_2 s_2, && s_1 b = t_1 b_2,\\
&a_2 t_2 = a_3 s_3, && s_2 b_2 = t_2 b_3,\\
&\quad\cdots\cdots && \quad\cdots\cdots\\
&a_n t_n = a' \cdot 1, && s_n b_n = t_n b',\\
&a' \cdot 1 = a'_1 u_1, && 1 \cdot b' = 1 \cdot b',\\
&a'_1 v_1 = a'_2 u_2, && u_1 b' = v_1 b'_2,\\
&a'_2 v_2 = a'_3 u_3, && u_2 b'_2 = v_2 b'_3,\\
&\quad\cdots\cdots && \quad\cdots\cdots\\
&a'_m v_m = a'', && u_m b'_m = v_m b''.
\end{aligned}
\tag{4.1.2}
$$

所以σ是等价关系. 对于任意$((sa,b),(a,sb)) \in H$,由于

$$
\begin{aligned}
&as = a \cdot s, &&\\
&a \cdot 1 = a, && s \cdot b = 1 \cdot sb,
\end{aligned}
$$

所以$(as,b)\sigma(a,sb)$,从而$\rho \subseteq \sigma$.

设$(a,b)\sigma(a',b')$,则有

$$
\begin{aligned}
(a,b) = (a_1 s_1, b)\rho(a_1, s_1 b) = (a_1, t_1 b_2)\rho(a_1 t_1, b_2) = (a_2 s_2, b_2)\\
\cdots (a_n s_n, b_n)\rho(a_n, s_n b_n) = (a_n, t_n b')\rho(a_n t_n, b') = (a', b')
\end{aligned}
$$

所以$(a,b)\rho(a',b')$.因此$\sigma \subseteq \rho$. 这就证明了$\sigma = \rho$. 所以由定义即得结论. □

命题 4.1.3 设B是左S -系,则$S \otimes B \simeq B$.

证明 作映射$\alpha : S \otimes B \to B$:

$$\alpha(s \otimes b) = sb, \quad \forall\, s \otimes b \in S \otimes B.$$

首先证明α是有定义的:设$s, s' \in S, b, b' \in B$使得在$S \otimes B$中有$s \otimes b = s' \otimes b'$.则由定理4.1.2知存在$s_1, \cdots, s_n \in S$, $b_2, \cdots, b_n \in B, u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n \in S$,使得:

$$
\begin{aligned}
&s = s_1 u_1, &&\\
&s_1 v_1 = s_2 u_2, && u_1 b = v_1 b_2,\\
&s_2 v_2 = s_3 u_3, && u_2 b_2 = v_2 b_3,
\end{aligned}
$$

$$\begin{array}{ll} \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ s_n v_n = s', & u_n b_n = v_n b'. \end{array}$$

所以$sb = s_1u_1b = s_1v_1b_2 = s_2u_2b_2 = \cdots = s_nu_nb_n = s_nv_nb' = s'b'$.

作映射$\beta : B \to S \otimes B$为:

$$\beta(b) = 1 \otimes b, \quad \forall\, b \in B.$$

显然β是有定义的.又$\alpha\beta = 1, \beta\alpha = 1$,所以$S \otimes B \simeq B$. □

同理可以证明:

命题 4.1.4 设A是右S-系,则$A \otimes S \simeq A$.

设A是右S-系, B是左S-右T-系,这里T也是一个幺半群.作张量积$A\otimes B$.在$A\otimes B$上定义右T-作用如下:

$$(a \otimes b) \cdot t = a \otimes bt, \quad \forall\, a \in A, \quad b \in B, \quad t \in T.$$

先证明上述定义是有意义的：设$a \otimes b = a' \otimes b'$,这里$a, a' \in A, b, b' \in B$.则由定理4.1.2知存在$a_1, \cdots, a_n \in A, b_2, \cdots, b_n \in B$, $u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n \in S$, 使得

$$\begin{array}{ll} a = a_1u_1, & \\ a_1v_1 = a_2u_2, & u_1b = v_1b_2, \\ a_2v_2 = a_3u_3, & u_2b_2 = v_2b_3, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_nv_n = a', & u_nb_n = v_nb'. \end{array}$$

所以 $a \otimes bt = a_1u_1 \otimes bt = a_1 \otimes u_1bt = a_1 \otimes v_1b_2t = a_1v_1 \otimes b_2t = a_2u_2 \otimes b_2t = \cdots = a_nu_n \otimes b_nt = a_n \otimes u_nb_nt = a_n \otimes v_nb't = a_nv_n \otimes b't = a' \otimes b't$.

显然,对任意$t, t' \in T, a \in A, b \in B$,在$A \otimes B$中有$(a \otimes b)(tt') = ((a \otimes b)t)t'$, $(a \otimes b) \cdot 1 = a \otimes b$,所以$A \otimes B$是右$T$-系.如果$C$是左$T$-系,则我们还可以作张量积$(A \underset{S}{\otimes} B) \underset{T}{\otimes} C$,这里符号$\underset{S}{\otimes}$表明是在$S$上作张量积,$\underset{T}{\otimes}$表明是在$T$上作张量积.在不引起混淆的情况下我们省去$S$或$T$.

设$A_S, {}_SB_T, {}_TC$如上.先作张量积$B \underset{T}{\otimes} C$. 我们也可以在$B \underset{T}{\otimes} C$上定义$S$的左作用而使得$B \underset{T}{\otimes} C$成为左$S$-系. 然后还可以作张量积$A \underset{S}{\otimes} (B \underset{T}{\otimes} C)$.利用定理4.1.2和命题4.1.3的证明类似地可证明如下结果.

命题 4.1.5 设S, T是幺半群, $A_S, {}_SB_T, {}_TC$如上. 则有同构$A \underset{S}{\otimes} (B \underset{T}{\otimes} C) \simeq (A \underset{S}{\otimes} B) \underset{T}{\otimes} C$.

设B是左S -系,则$S \otimes B$也是左S -系.考察命题4.1.3的证明, 可以发现,映射α, β都是S -同态,所以命题4.1.3中的$S \otimes B \simeq B$不仅是集合同构,而且还是左S -系同构.同理命题4.1.4中的$A \otimes S \simeq A$还是右S -系同构.

固定左S -系B.记集合范畴为Set, 规定:

$$\begin{aligned} -\otimes B:\ \text{Act-}S &\longrightarrow \text{Set}, \\ A &\longmapsto A \otimes B, \\ (A \xrightarrow{\alpha} A') &\longmapsto (A \otimes B \xrightarrow{\alpha\otimes 1} A' \otimes B), \end{aligned}$$

其中$\alpha \otimes 1$的定义如下:

$$(\alpha \otimes 1)(a \otimes b) = \alpha(a) \otimes b, \quad \forall\, a \otimes b \in A \otimes B.$$

则有

定理 4.1.6 $-\otimes B$是从右S -系范畴Act-S到集合范畴Set的函子.

证明 设A, A', A''都是右S -系, $A \xrightarrow{\beta} A' \xrightarrow{\alpha} A''$是$S$ -同态. 显然$(\alpha\beta)\otimes 1 = (\alpha \otimes 1)(\beta \otimes 1)$.又$1_A \otimes 1 = 1_{A\otimes B}$.所以$-\otimes B$是函子. □

同理可证:

定理 4.1.7 设A是右S -系,则$A\otimes -$是从左S -系范畴S -Act到集合范畴Set的函子.

命题 4.1.8 设B是左S -系,则$-\otimes B$把满同态变为满映射.

证明 设同态$\alpha: A \to A'$是满的. 对于任意$a' \otimes b \in A' \otimes B$,存在$a \in A$, 使得$\alpha(a) = a'$. 所以$(\alpha \otimes 1)(a \otimes b) = \alpha(a) \otimes b = a' \otimes b$. □

但是$-\otimes B$把单同态不一定变为单映射.这种B的例子我们以后会见到很多.

定义 4.1.9 称左S -系B是平坦的,如果函子$-\otimes B$把任意单同态可变为单映射.

命题 4.1.10 S -系B是平坦的当且仅当: 对于任意右S -系A, 任意$a, a' \in A$, 映射$(aS \cup a'S) \otimes B \to A \otimes B$是单的.

证明 设A, C是右S -系且$A \leqslant C$, $a, a' \in A, b, b' \in B$, 在$C\otimes B$中有$a\otimes b = a'\otimes b'$.因为$a, a' \in C$, 所以$aS\cup a'S \leqslant C$. 由条件知映射$(aS\cup a'S)\otimes B \to C\otimes B$是单的, 所以在$(aS\cup a'S)\otimes B$中有$a\otimes b = a'\otimes b'$. 因此在$A\otimes B$中有$a\otimes b = a'\otimes b'$. 即$A \otimes B \to C \otimes B$是单映射.

另一个方向的证明是显然的. □

由此即可得到平坦性的一个重要等价条件.

定理 4.1.11 设B是左S -系.则B是平坦的当且仅当: 对任意右S -系A,任意$a, a' \in A$,任意$b, b' \in B$,若在$A \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$,则在$(aS \cup a'S) \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$.

下面考虑平坦S -系的性质.

定理 4.1.12 设$B_i(i \in I)$是S -系. 则$\coprod_{i\in I} B_i$是平坦系当且仅当每个B_i是平坦系.

证明 对于任意右S -系A, 容易证明

$$A \otimes (\coprod_{i\in I} B_i) \simeq \coprod_{i\in I}(A \otimes B_i),$$

由此即得结论. □

定理 4.1.13 设$A \leqslant B$,且自然包含同态$A \to B$是可收缩的. 如果B是平坦系,则A也是平坦系.

证明 设同态$f: B \to A$满足$f|_A = 1$.

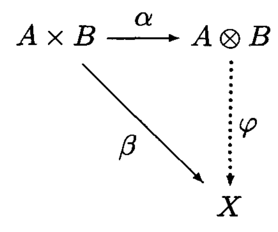
设D是右S -系且$C \leqslant D, c, c' \in C, a, a' \in A$, 在$D \otimes A$中有$c \otimes a = c' \otimes a'$. 则在$D \otimes B$中有$c \otimes a = c' \otimes a'$. 因为$B$是平坦的,所以在$C \otimes B$中有$c \otimes a = c' \otimes a'$. 因此在$C \otimes A$中有$c \otimes a = (1 \otimes f)(c \otimes a) = (1 \otimes f)(c' \otimes a') = c' \otimes a'$.这就证明了映射$C \otimes A \to D \otimes A$是单的,从而$A$是平坦系. □

推论 4.1.14 投射系是平坦系.

证明 对于任意$e \in E(S)$,包含同态$Se \to S$是可收缩的.而由命题4.1.4知${}_SS$是平坦的,所以由定理4.1.13知Se是平坦的. 设P是投射S -系,则$P \simeq \coprod_{i\in I} S_{e_i}, e_i \in E(S)$. 所以由定理4.1.12和上面已证的结果知$P$是平坦的. □

设A是右S -系, B是左S -系, X是集合. 映射$\beta: A \times B \to X$称为是平衡的,如果对于任意$a \in A$,任意$b \in B$,任意$s \in S$,恒有$\beta(as, b) = \beta(a, sb)$.令$\alpha: A \times B \to A \otimes B$为$\alpha(a, b) = a \otimes b$,则显然$\alpha$是平衡映射.

定理 4.1.15 设A是右S -系, B是左S -系, $\alpha: A \times B \to A \otimes B$是如上定义的平衡映射.则张量积$A \otimes B$具有下述的泛性质:对于任意集合$X$和任意平衡映射$\beta: A \times B \to X$,存在唯一映射$\varphi$使得下图可换:



证明 规定映射$\varphi: A \otimes B \to X$如下:

$$\varphi(a \otimes b) = \beta(a, b), \quad \forall\, a \otimes b \in A \otimes B.$$

先说明φ的定义是可行的:设$a \otimes b = a' \otimes b'$,这里$a, a' \in A, b, b' \in B$. 我们要证明$\beta(a, b) = \beta(a', b')$. 由定理4.1.2知存在$a_1, \cdots, a_n \in A, b_2, \cdots, b_n \in B$,

$s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$, 使得

$$\begin{aligned} a &= a_1 s_1, & & \\ a_1 t_1 &= a_2 s_2, & s_1 b &= t_1 b_2, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ a_n t_n &= a', & s_n b_n &= t_n b'. \end{aligned}$$

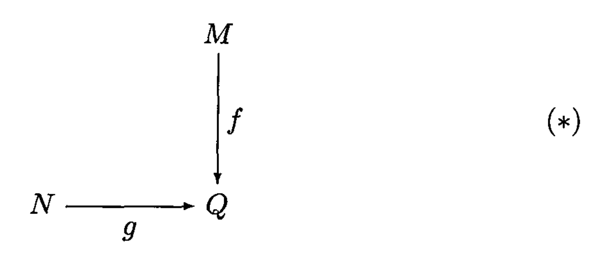
所以$\beta(a,b) = \beta(a_1 s_1, b) = \beta(a_1, s_1 b) = \beta(a_1, t_1 b_2) = \cdots = \beta(a_n, t_n b') = \beta(a_n t_n, b') = \beta(a', b')$.

显然$\beta = \varphi\alpha$.下面证明φ还是唯一的.设还有$\varphi' : A \otimes B \to X$满足$\beta = \varphi'\alpha$.则对任意$a \in A, b \in B, \varphi\alpha(a,b) = \varphi'\alpha(a,b)$,即$\varphi(a \otimes b) = \varphi'(a \otimes b)$. 因为$A \otimes B = \{a \otimes b | a \in A, b \in B\}$,所以$\varphi = \varphi'$. □

因此,我们也可以用定理4.1.15中的泛性质来定义A和B的张量积. 注意用泛性质定义的构造都在同构意义下唯一,其证明也几乎是同一模式,参见§1.2.

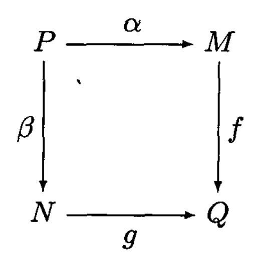
§4.2 条件(P)及其推广

设有右S -系及右S -同态构成的图:

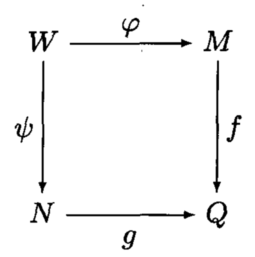


右S -系P以及右S -系的同态$\alpha : P \longrightarrow M$, $\beta : P \longrightarrow N$称为上图的拉回, 如果以下两条被满足:

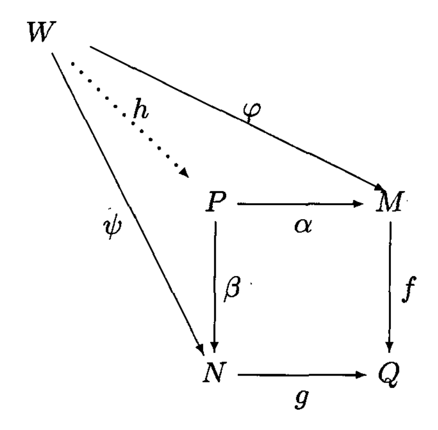
(1) 下图交换:



(2) 对于任意交换图:



存在唯一的同态$h:W\longrightarrow P$,使得下图交换:



容易证明,拉回若存在,则在同构的意义下唯一. 我们将(*)的拉回图记为$P(M, N, f, g, Q)$.

命题 4.2.1 设M,N,Q,f,g同上且$\mathrm{Im}f\cap\mathrm{Im}g\neq\emptyset$.令

$$P=\{(m,n)|m\in M,n\in N,f(m)=g(n)\},$$

$\pi_1:P\to M$的定义为:$\pi_1(m,n)=m$, $\pi_2:P\to N$的定义为$\pi_2(m,n)=n$,则(P,π_1,π_2)是拉回.

证明 显然P是右S -系, π_1,π_2是S -同态.对任意$(m,n)\in P$, $f\pi_1(m,n)=f(m)=g(n)=g\pi_2(m,n)$. 设$W$是右$S$ -系, $\varphi:W\to M$, $\psi:W\to N$是S -同态且$f\varphi=g\psi$. 规定映射$h:W\to P$如下:

$$h(w)=(\varphi(w),\psi(w)),\quad \forall\, w\in W.$$

因为 $f\varphi(w)=g\psi(w)$, 所以h是有意义的. 显然h是 S -同态, 且 $\pi_1h(w)=\varphi(w),\pi_2h(w)=\psi(w)$, 所以$\pi_1h=\varphi$, $\pi_2h=\psi$. 设还有S -同态$h':W\to P$也

满足$\pi_1 h' = \varphi, \pi_2 h' = \psi$. 不妨设$h(w) = (m,n) \in P$, $h'(w) = (m',n') \in P$. 则$m = \pi_1(m,n) = \pi_1 h(w) = \pi_1 h'(w) = \pi_1(m',n') = m'$, 同理$n = n'$.所以$h = h'$.根据定义即知$(P, \pi_1, \pi_2)$是拉回. □

定义 4.2.2 左S -系B称为是拉回平坦的,如果函子$-\otimes B$把Act-S中的拉回图仍变为拉回图.

关于拉回平坦系的许多等价刻画我们放到§4.4中.

定义 4.2.3 称左S -系A满足条件(P), 如果对任意的$s, s' \in S$, 任意的$a, a' \in A$, 若$sa = s'a'$, 则存在$a'' \in A, u, v \in S$, 使得$su = s'v, a = ua'', a' = va''$.

定理 4.2.4 满足条件(P)的S -系是平坦系.

证明 设左S -系A满足条件(P), Y是右S -系, $X \leqslant Y$, $x, x' \in X, a, a' \in A$,在$Y \otimes A$中有$x \otimes a = x' \otimes a'$.由定理4.1.2知存在$y_1, \cdots, y_n \in Y$, $a_2, \cdots, a_n \in A$, $s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$,使得

$$\begin{aligned} &x = y_1 s_1, \\ &y_1 t_1 = y_2 s_2, \qquad s_1 a = t_1 a_2, \\ &y_2 t_2 = y_3 s_3, \qquad s_2 a_2 = t_2 a_3, \\ &\quad \cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots \\ &y_n t_n = x', \qquad s_n a_n = t_n a'. \end{aligned}$$

我们对n用数学归纳法证明在$X \otimes A$中有$x \otimes a = x' \otimes a'$.

设$n = 1$. 则有

$$\begin{aligned} &x = y_1 s_1, \\ &y_1 t_1 = x', \qquad s_1 a = t_1 a'. \end{aligned}$$

因为A满足条件(P), 所以存在$a_1 \in A, u, v \in S$使得$s_1 u = t_1 v, a = u a_1, a' = v a_1$. 因此$xu = (y_1 s_1) u = y_1 (s_1 u) = y_1 t_1 v = x' v$,故我们有

$$\begin{aligned} &x = x \cdot 1, \\ &xu = x' v, \qquad 1 \cdot a = u a_1, \\ &x' \cdot 1 = x', \qquad v \cdot a_1 = 1 \cdot a'. \end{aligned}$$

从而由定理4.1.2知在$X \otimes A$中有$x \otimes a = x' \otimes a'$.

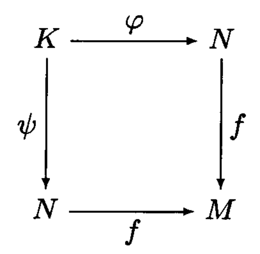
设 $n > 1$.对于$s_1 a = t_1 a_2$,由条件(P)知存在$u, v \in S, a_1 \in A$使得$s_1 u = t_1 v, a = ua_1, a_2 = va_1$. 所以有

$$\begin{aligned}
&xu = y_1 s_1 u = y_1 t_1 v = y_2 s_2 v, && \\
&y_2 t_2 = y_3 s_3, && s_2 v a_1 = s_2 a_2 = t_2 a_3, \\
&\quad\cdots\cdots && \quad\cdots\cdots \\
&y_n t_n = x', && s_n a_n = t_n a'.
\end{aligned}$$

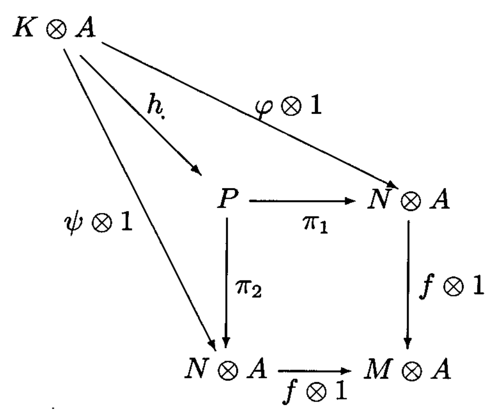
由归纳假定即知在$X \otimes A$中有$xu \otimes a_1 = x' \otimes a'$.所以$x \otimes a = x \otimes ua_1 = xu \otimes a_1 = x' \otimes a'$. □

引理 4.2.5 拉回平坦S -系是平坦的.

证明 设左S -系A是拉回平坦的.再设N_S是M_S的子系.记$K = \{(n, n) | n \in N\}$. 则有下面的拉回图:



因为A是拉回平坦的,所以有下面的交换图:



这里, $P = \{(n \otimes a, n' \otimes a') | n \otimes a, n' \otimes a' \in N \otimes A, (f \otimes 1)(n \otimes a) = (f \otimes 1)(n' \otimes a')\}$ 以及π_1, π_2是由命题4.2.1所决定的拉回.由拉回图的唯一性即知$h : K \otimes A \longrightarrow P$ 是同构.

设$n, n' \in N, a, a' \in A$ 使得$(f \otimes 1)(n \otimes a) = (f \otimes 1)(n' \otimes a')$.则$(n \otimes a, n' \otimes a') \in P$. 所以存在$(n, n) \otimes a'' \in K \otimes A$使得$(n \otimes a, n' \otimes a') = h((n, n) \otimes a'')$.所

以$n \otimes a = \pi_1(n \otimes a, n' \otimes a') = \pi_1 h((n,n) \otimes a'') = (\varphi \otimes 1)((n,n) \otimes a'') = \varphi(n,n) \otimes a'' = n \otimes a''$. 同理$n' \otimes a' = n \otimes a''$,所以在$N \otimes A$中有$n \otimes a = n' \otimes a'$. 这就证明了$f \otimes 1$是单同态, 所以$A$是平坦的. □

引理 4.2.6 设A是平坦左S -系, $a, a' \in A$, $s, t \in S$使得$sa = ta'$. 则$sS \cap tS \neq \emptyset$.

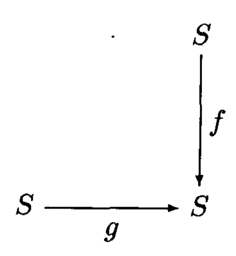
证明 因为$sa = ta'$, 所以在 $S \otimes A$ 中有$s \otimes a = t \otimes a'$. 又因为 A 是平坦左S -系, 所以在$(sS \cup tS) \otimes A$中有$s \otimes a = t \otimes a'$. 由定理4.1.2知存在$s_1, \cdots, s_n \in sS \cup tS, a_2, \cdots, a_n \in A$, $u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n \in S$, 使得

$$
\begin{aligned}
&s = s_1 u_1, & & \\
&s_1 v_1 = s_2 u_2, & & u_1 a = v_1 a_2, \\
&s_2 v_2 = s_3 u_3, & & u_2 a_2 = v_2 a_3, \\
&\cdots\cdots & & \cdots\cdots \\
&s_n v_n = t, & & u_n a_n = v_n a'.
\end{aligned}
$$

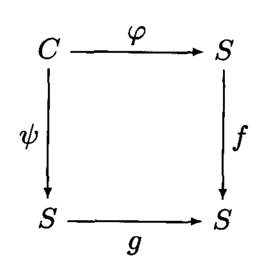
由此即知$sS \cap tS \neq \emptyset$. □

定理 4.2.7 拉回平坦S -系满足条件(P).

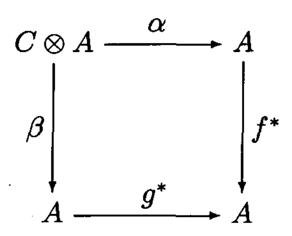
证明 设左S -系A是拉回平坦的. 再设$a, a' \in A, s, t \in S$满足$sa = ta'$.考虑下图:



其中同态f, g的定义为:$f(x) = sx, g(x) = tx, \forall\ x \in S$. 因为$A$是拉回平坦的,所以由引理4.2.5知$A$是平坦的. 再由引理4.2.6知$sS \cap tS \neq \emptyset$. 所以由命题4.2.1即知上图有拉回. 设$C$为其拉回, 则有拉回图:



因为A是拉回平坦的,所以由命题4.1.3知有如下的拉回图:



这里f^*, g^*的定义为: $f^*(a) = sa, g^*(a) = ta, \forall\ a \in A$. 由命题4.2.1知$C \otimes A \simeq P = \{(x, y) \in A \times A \mid f^*(x) = g^*(y)\} = \{(x, y) \in A \times A \mid sx = ty\}$. 记同构$S \otimes A \to A$为$h$, 即$h(s \otimes a) = sa$; 记同构$P \to C \otimes A$为$k$. 则$\alpha = h(\varphi \otimes 1), \beta = h(\psi \otimes 1)$. 因为$sa = ta'$, 所以$(a, a') \in P$.设$k(a, a') = c \otimes a'' \in C \otimes A$. 则$\alpha(c \otimes a'') = h(\varphi(c) \otimes a'') = \varphi(c)a'', \beta(c \otimes a'') = h(\psi(c) \otimes a'') = \psi(c)a''$. 又$\alpha(c \otimes a'') = \alpha k(a, a') = \pi_1(a, a') = a, \beta(c \otimes a'') = \beta k(a, a') = \pi_2(a, a') = a'$,这里同态$\pi_1, \pi_2$同命题4.2.1. 所以有$a = \varphi(c)a'', a' = \psi(c)a''$. 又显然有$s\varphi(c) = \alpha\varphi(c) = \beta\psi(c) = t\psi(c)$. 所以$A$满足条件(P). □

命题 4.2.8 设A是有限生成S -系. 若A满足条件(P),则A是有限个循环子系的不交并.

证明 设$A = Sa_1 \cup Sa_2$. 若$Sa_1 \cap Sa_2 = \emptyset$, 则$A$就是循环子系的不交并. 设$Sa_1 \cap Sa_2 \neq \emptyset$, 假定$sa_1 = ta_2$, $s, t \in S$. 由于A满足条件(P), 所以存在$a' \in A, u, v \in S$,使得

$$su = tv,\ a_1 = ua',\ a_2 = va'.$$

若$a' \in Sa_1$,则$a_2 \in Sa_1$, 所以$A = Sa_1$. 若$a' \in Sa_2$, 同理可得$A = Sa_2$. 总之, A是循环子系的不交并.

设$A = Sa_1 \cup \cdots \cup Sa_n$.利用数学归纳法,类似于上面的证明即得结论. □

定理 4.2.9 所有左S -系满足条件(P)当且仅当S是群.

证明 设S是群, A是左S -系, $a, a' \in A, s, t \in S$满足$sa = ta'$.令$u = s^{-1}t, v = 1, a'' = a'$,则有

$$su = ss^{-1}t = t \cdot 1 = tv, a = s^{-1}ta' = ua'', a' = 1 \cdot a'' = va''.$$

所以A满足条件(P).

反过来,设所有S -系满足条件(P). 假定L是S的真左理想,构造S -系$A(L) = S(1, x) \cup S(1, y)$. 因为$S(1, x) \cap S(1, y) \neq \emptyset$, $S(1, x) \neq S(1, y)$,所以由命题4.2.8即得矛盾.矛盾说明S没有真的左理想,所以S是群. □

为了刻画所有左S -系都是拉回平坦系的幺半群,我们还需要以下引理.

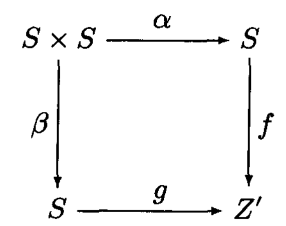
引理 4.2.10 设S是群, A是右S -系, B是左S -系. 则在$A\otimes B$中$a\otimes b=a'\otimes b'$当且仅当存在$g\in S$,使得$a=a'g$,且$gb=b'$.

证明 因为S是群,故利用定理4.1.2容易证得此结论. □

引理 4.2.11 设S是群, Z为单元左S -系.则Z是拉回平坦的当且仅当$S=\{1\}$.

证明 若$S=\{1\}$,则$Z\simeq S$,所以Z显然是拉回平坦的.

反过来,设Z是拉回平坦的. 考虑下面的交换图:



这里$Z'=\{z'\}$是单元右S -系, $S,S\times S$都看成是右S -系,$f(s)=z'$, $g(s)=z'$, $\alpha(s,t)=s$, $\beta(s,t)=t$.显然该图是拉回图. 所以下图也是拉回图:

$$\begin{array}{ccc}(S\times S)\otimes Z & \xrightarrow{\alpha\otimes 1} & S\otimes Z\\ \Big\downarrow{\scriptstyle\beta\otimes 1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f}\\ S\otimes Z & \xrightarrow{g\otimes 1} & Z'\otimes Z\end{array}$$

因为$S\otimes Z\simeq Z$,所以$(S\times S)\otimes Z\simeq Z$. 因此$|(S\times S)\otimes Z|=1$. 故对任意$s\in S,(1,s)\otimes z=(1,1)\otimes z$,这里$Z=\{z\}$. 所以由引理4.2.10知存在$s'\in S$使得$(1,s)=(1,1)s'$,从而$s=s'=1$.即$S=\{1\}$. □

定理 4.2.12 所有S -系都是拉回平坦的当且仅当$S=\{1\}$.

证明 如果$S=\{1\}$,则对任意右S -系A和左S -系B有$A\otimes B=A\times B$. 所以容易证明任意左S -系都是拉回平坦的.

反之,设所有左S -系都是拉回平坦的,则所有左S -系都满足条件(P). 由定理4.2.9即知S是群. 所以由引理4.2.11可得结论. □

由定理4.2.7知任意拉回平担系一定满足条件(P), 由定理4.2.9和定理4.2.12可知满足条件(P)的系不一定是拉回平坦的.

最后我们给出条件(P)的若干等价刻画以备以后引用. 为此先证下面的命题.

命题 4.2.13 设A是右S -系, B是左S -系, $a,a'\in A,b,b'\in B$.则在$A\otimes B$中$a\otimes b=a'\otimes b'$的充要条件是: 存在$b_1,\cdots,b_n\in B,a_2,\cdots,a_n\in A,s_1,t_1,\cdots,$

$s_n, t_n \in S$, 使得

$$
\begin{aligned}
& & b &= s_1b_1, \\
as_1 &= a_2t_1, & t_1b_1 &= s_2b_2, \\
a_2s_2 &= a_3t_2, & t_2b_2 &= s_3b_3, \\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\
a_ns_n &= a't_n, & t_nb_n &= b'.
\end{aligned} \tag{4.2.1}
$$

证明 类似于定理4.1.2的证明. □

命题 4.2.14 设B是S -系,则以下两条等价:

(1) B满足条件(P);

(2) 对任意右S -系A, 任意$a, a' \in A$, $b, b' \in B$, 在$A \otimes B$中$a \otimes b = a' \otimes b'$当且仅当存在$b_1 \in B$, $s_1, t_1 \in S$, 使得

$$b = s_1b_1, \quad b' = t_1b_1, \quad as_1 = a't_1.$$

证明 (1)⇒(2) 设$a \otimes b = a' \otimes b'$,则由命题4.2.13知存在$b_1, \cdots, b_n \in B, a_2, \cdots, a_n \in A$, $s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$,使得等式组(4.2.1)成立.如果$n = 1$,则结论即成立.设$n \geqslant 2$.对于等式$t_1b_1 = s_2b_2$, 由条件(P)知存在$b'' \in B$, $u, v \in S$,使得$t_1u = s_2v$, $b_1 = ub'', b_2 = vb''$. 所以有

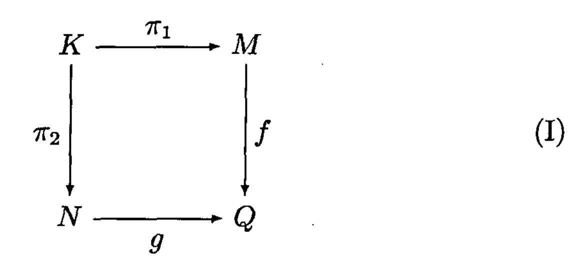
$$
\begin{aligned}
& & b &= s_1ub'', \\
as_1u &= a_3t_2v, & t_2vb'' &= s_3b_3, \\
a_3s_3 &= a_4t_3, & t_3b_3 &= s_4b_4, \\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\
a_ns_n &= a't_n, & t_nb_n &= b'.
\end{aligned}
$$

此等式组的个数比式(4.2.1)少2,所以可用数学归纳法完成证明. 另一个方向是不证自明的.

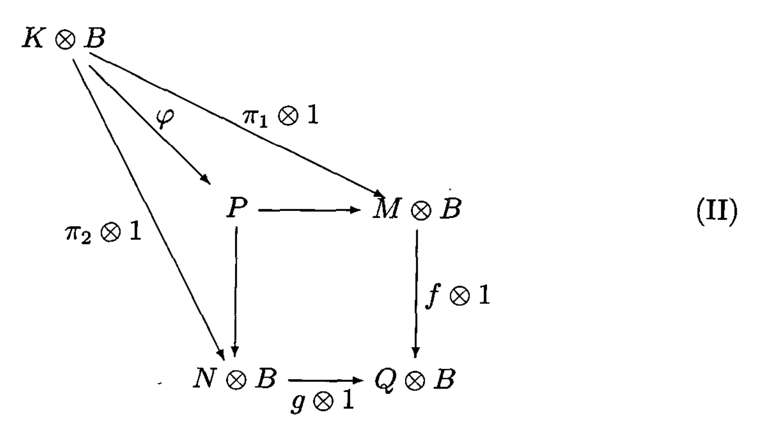
(2)⇒(1) 设$b, b' \in B$, $s, t \in S$,使得$sb = tb'$.则在$S \otimes B$中有$s \otimes b = t \otimes b'$. 所以由条件即知存在$b_1 \in B$, s_1, $t_1 \in S$使得$b = s_1b_1$, $b' = t_1b_1$, $ss_1 = tt_1$.因此B满足条件(P). □

下面利用拉回图给出条件(P)的等价刻画.

设有右S -系的拉回图:



由命题4.2.1我们可设$K=\{(m,n)\in M\times N|f(m)=g(n)\}$. 设$B$是左$S$ -系. 考虑下图:



其中

$$P=\{(m\otimes b,n\otimes b')|m\otimes b\in M\otimes B,\\ n\otimes b'\in N\otimes B, f(m)\otimes b=g(n)\otimes b'\},$$

φ的定义为:

$$\varphi((m,n)\otimes b)=(m\otimes b,n\otimes b),\quad \forall\ b\in B,\ \ \forall\ (m,n)\in K.$$

由定理4.1.2容易证明φ是有定义的.显然B是拉回平坦的当且仅当对任意拉回图(I),图(II)中对应的φ是一一映射. 下文中凡是提到"右S -系范畴中任意拉回图$P(M,N,f,g,Q)$的映射φ"就指类似于这里定义的φ.

对于条件(P), 则有:

命题 4.2.15　对于左S -系B,下述条件等价:

(1)右S -系范畴中任意拉回图$P(M,N,f,g,Q)$的映射φ是满射;

(2)右S -系范畴中任意拉回图$P(M,M,f,g,Q)$的映射φ是满射;

(3)右S -系范畴中任意拉回图$P(I,I,f,g,S)$的映射φ是满射,其中I是S的右理想;

(4)右S -系范畴中任意拉回图$P(sS,sS,f,g,S)$的映射φ是满射, 其中$s\in S$;

(5)右S -系范畴中任意拉回图$P(S,S,f,g,S)$的映射φ是满射;

(6)右S -系范畴中任意拉回图$P(M,M,f,f,Q)$的映射φ是满射;

(7) B满足条件(P).

证明 (1)⇒(2)⇒(3)⇒(4)⇒(5)和(2)⇒(6) 显然.

(6)⇒(7) 假设右S -系范畴中任意拉回图 $P(M,M,f,f,Q)$ 的映射 φ 是满射. 设对于 $b,b'\in B$, $s,$‘$s'\in S$, $sb=s'b'$. 取 F 是具有两个生成元的自由右S -系,记为 $F=\{1,2\}\times S$, 规定 S 在 F 上的右作用: $(i,s)u=(i,su)$. 定义 S -同态f: $F\to S$如下:

$$f((1,1))=s,$$
$$f((2,1))=s'.$$

那么由$sb=s'b'$可得$f((1,1))\otimes b=f((2,1))\otimes b'$在$S\otimes B$中成立. 由拉回图$P(M,M,f,f,Q)$的映射$\varphi$的满性,存在$b''\in B,u,v\in S,i,j\in\{1,2\}$使得$f((i,u))=f((j,v))$, $(1,1)\otimes b=(i,u)\otimes b''$, $(2,1)\otimes b'=(j,v)\otimes b''$ 在$F\otimes B$中成立. 由定理4.1.2及等式$(1,1)\otimes b=(i,u)\otimes b''$, 存在自然数$n$以及$p_2,\cdots,p_n,s_1,\cdots,s_n$, $t_1,\cdots,t_n\in S$,$b_2,\cdots,b_n\in B$, $i_2,\cdots,i_n\in\{1,2\}$,使得

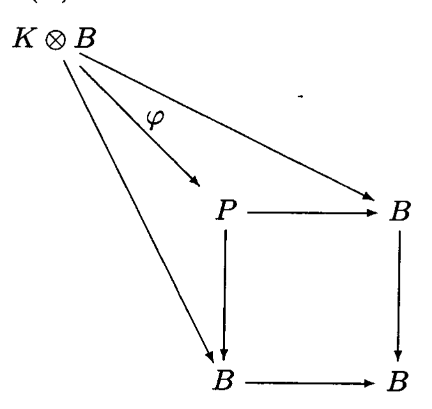
$$\begin{aligned}
& & b&=s_1b_1,\\
(1,1)s_1&=(i_2,p_2)t_1, & t_1b_1&=s_2b_2\\
(i_2,p_2)s_2&=(i_3,p_3)t_2, & t_2b_2&=s_3b_3,\\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots\\
(i_n,p_n)s_n&=(i,u)t_n, & t_nb_n&=b''.
\end{aligned}$$

由等式$(1,1)s_1=(i_2,p_2)t_1$可得$i_2=1$. 同理可得$i_3=i_4=\cdots=i_n=i=1$. 由此有下述等式组:

$$\begin{aligned}
& & b&=s_1b_1,\\
1s_1&=p_2t_1, & t_1b_1&=s_2b_2\\
p_2s_2&=p_3t_2, & t_2b_2&=s_3b_3,\\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots\\
p_ns_n&=ut_n, & t_nb_n&=b''.
\end{aligned}$$

说明在$S\otimes B$中有$1\otimes b=u\otimes b''$. 类似地可得$j=2$并且在$S\otimes B$中有$1\otimes b'=v\otimes b''$. 由引理得$b=ub''$, $b'=vb''$. 最后由f的定义及$f((1,u))=f((2,v))$推出$su=s'v$.

(5)⇒(7) 设$b,b'\in B$, $s,s'\in S$使得$sb=s'b'$. 定义f和g分别是由s和s'确定的S上的左平移, 即任意的$x\in S$, $f(x)=sx, g(x)=s'x$. 那么$K=\{(u,v)\in S\times S|su=s'v\}$.此时图(II)为



其中

$$P=\{(b,b')\in B\times B|sb=s'b'\},$$

φ的定义为

$$\varphi((u,v)\otimes b)=(ub,vb),\quad \forall\ (u,v)\in K,\quad b\in B.$$

因为$(b_0,b_0')\in P$, 所以存在$b''\in B$, $(u,v)\in K$使得$\varphi((u,v)\otimes b'')=(b,b')$. 即$su=s'v, b=ub'', b'=vb''$. 故$B$满足条件(P).

(7)⇒(1) 任取$(m\otimes b, n\otimes b')\in P$, 其中$P$如图(II). 则在$Q\otimes B$中有$f(m)\otimes b=g(n)\otimes b'$. 因为$B$满足条件(P), 所以由命题4.2.14知存在$b''\in B$, $u,v\in S$, 使得

$$b=ub'',\quad b'=vb'',\quad f(m)u=g(n)v.$$

因为$f(mu)=f(m)u=g(n)v=g(nv)$, 所以$(mu,nv)\in K$. 显然, $\varphi((mu,nv)\otimes b'')=(mu\otimes b'', nv\otimes b'')=(m\otimes ub'', n\otimes vb'')=(m\otimes b, n\otimes b')$, 所以$\varphi$是满射. □

下面我们给出条件(P)的两种推广.

定义 4.2.16　称左S -系A满足条件(PWP), 如果右S -系范畴中任意拉回图$P(sS,sS,f,f,S)$的映射φ是满射, 其中$s\in S$.

定理 4.2.17　设A是左S -系,则以下几条等价:

(1) 右S -系范畴中任意拉回图$P(sS,sS,f,f,S)$的映射φ是满射, 其中$s\in S$;

(2) 右S -系范畴中任意拉回图$P(S, S, f, f, S)$的映射φ是满射;

(3) 对任意的$t \in S$, $a, a' \in A$, 若$ta = ta'$, 则存在$a'' \in A, u, v \in S$, 使得$tu = tv, a = ua'', a' = va''$.

证明 (1)⇒(2) 显然.

(2)⇒(3) 设$t \in S$, $a, a' \in A$, 使得$ta = ta'$. 记$\lambda_t : S \to S$是S上的左平移, 即任意的$s \in S$有$\lambda_t(s) = ts$. 那么由$ta = ta'$有$\lambda_t(1)a = \lambda_t(1)a'$. 故由命题4.1.3可知在$S \otimes A$中有$\lambda_t(1) \otimes a = \lambda_t(1) \otimes a'$. 因为右$S$ -系范畴中任意拉回图$P(S, S, \lambda_t, \lambda_t, S)$的映射$\varphi$是满射, 存在$a'' \in A, u, v \in S$使得$\lambda_t(u) = \lambda_t(v)$, 并且在$S \otimes A$中$1 \otimes a = u \otimes a''$, $1 \otimes a' = v \otimes a''$. 此即$tu = tv, a = ua'', a' = va''$.

(3)⇒(1) 设$x, y, s \in S$, $a, a' \in A$, $f : sS \to S$是右S -同态. 并且使得$f(sx) \otimes a = f(sy) \otimes a'$. 记$t = f(s)$. 则由$f(sx) \otimes a = f(sy) \otimes a'$显然有$txa = tya'$. 由定理4.2.17(3)知存在$a'' \in A, u, v \in S$, 使得$tu = tv, xa = ua'', ya' = va''$. 那么

$$f(su) = f(s)u = tu = tv = f(s)v = f(sv),$$

在$sS \otimes A$中

$$sx \otimes a = s \otimes xa = s \otimes ua'' = su \otimes a'',$$

$$sy \otimes a' = s \otimes ya' = s \otimes va'' = sv \otimes a''.$$

这说明右S -系范畴中任意拉回图$P(sS, sS, f, f, S)$的映射φ是满射. □

下面命题给出了循环左S -系满足条件(PWP)的刻画.

命题 4.2.18 设λ是幺半群S上的左同余. 循环左S -系S/λ满足条件(PWP)当且仅当对任意的$x, y, t \in S$, 若$(tx)\lambda(ty)$,则存在$u, v \in S$使得$tu = tv, x\lambda u$, 并且$y\lambda v$.

证明 由定理4.2.17显然. □

定义 4.2.19 称左S -系A满足条件(WP), 如果右S -系范畴中任意拉回图$P(I, I, f, f, S)$的映射φ是满射, 其中I是S的右理想.

条件(PWP)也称为条件(P)的主弱形式,而条件(WP)称为条件(P)的弱形式,由命题4.2.15的(6)显然可以看出,条件(PWP)和条件(WP)都是条件(P)的推广.

命题 4.2.20 左S -系A满足条件(WP)当且仅当对任意的$s, t \in S$,任意的右S -同态$f : (sS \cup tS) \to S$以及$a, a' \in A$,若$f(s)a = f(t)a'$,则存在$a'' \in A, u, v \in S, s', t' \in \{s, t\}$,使得$f(s'u) = f(t'v)$, 并且在$(sS \cup tS) \otimes A$中有$s \otimes a = s'u \otimes a''$, $t \otimes a' = t'v \otimes a''$.

证明 由条件(WP)的定义显然. □

下面的命题则给出了条件(WP)的另一种刻画.

命题 4.2.21 左S -系A满足条件(WP)当且仅当对任意的$s,t\in S$,任意的右S -同态$f:(sS\cup tS)\to S$以及$a,a'\in A$,若$f(s)a=f(t)a'$,则存在$a'',a_1,a_2\in A,u,v,p_1,p_2,q_1,q_2\in S$,使得下述三种情形必居其一:

(1) $f(su)=f(tv)$并且

$$\begin{aligned} & & a &= p_1a_1,\\ sp_1 &= sq_1, & q_1a_1 &= ua'',\\ & & a' &= p_2a_2,\\ tp_2 &= tq_2, & q_2a_2 &= va'', \end{aligned}$$

(2)$f(tu)=f(tv)$并且

$$\begin{aligned} & & a &= p_1a_1,\\ sp_1 &= sq_1, & q_1a_1 &= p_2a_2,\\ sp_2 &= tq_2, & q_2a_2 &= ua'',\\ & & a' &= va'', \end{aligned}$$

(3)$f(su)=f(sv)$并且

$$\begin{aligned} & & a' &= p_1a_1,\\ tp_1 &= tq_1, & q_1a_1 &= p_2a_2,\\ tp_2 &= sq_2, & q_2a_2 &= va'',\\ & & a &= ua''. \end{aligned}$$

证明 必要性 设$s,t\in S,a,a'\in A$, $f:(sS\cup tS)\to S$是右S -同态,使得$f(s)a=f(t)a'$. 由命题4.2.20知存在$a''\in A,u,v\in S,s',t'\in\{s,t\}$,使得$f(s'u)=f(t'v)$, 并且在$(sS\cup tS)\otimes A$中有$s\otimes a=s'u\otimes a''$, $t\otimes a'=t'v\otimes a''$. 所以在$(sS\cup tS)\otimes A$中有$s\otimes a=s'\otimes ua''$, $t\otimes a'=t'\otimes va''$. 由命题4.2.13知存在自然数$m$和$n$以及$a_1,\cdots,a_n,a'_1,\cdots,a'_m\in A,z_2,\cdots,z_n,z'_2,\cdots,z'_m\in\{s,t\}$, $p_1,q_1,\cdots,p_n,q_n,p'_1,q'_1,\cdots,p'_m,q'_m\in S$, 使得

$$\begin{aligned} & & a &= p_1a_1, \\ sp_1 &= z_2q_1, & q_1a_1 &= p_2a_2, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ z_kp_k &= z_{k+1}q_k, & q_ka_k &= p_{k+1}a_{k+1}, \\ z_{k+1}p_{k+1} &= z_{k+2}q_{k+1}, & q_{k+1}a_{k+1} &= p_{k+2}a_{k+2}, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ z_{n-1}p_{n-1} &= z_nq_{n-1}, & q_{n-1}a_{n-1} &= p_na_n, \\ z_np_n &= s'q_n, & q_na_n &= ua'', \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} & & a' &= p'_1a'_1, \\ tp'_1 &= z'_2q'_1, & q'_1a'_1 &= p'_2a'_2, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ z'_lp'_l &= z'_{l+1}q'_l, & q'_la'_l &= p'_{l+1}a'_{l+1}, \\ z'_{l+1}p'_{l+1} &= z'_{l+2}q'_{l+1}, & q'_{l+1}a'_{l+1} &= p'_{l+2}a'_{l+2}, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ z'_{m-1}p'_{m-1} &= z'_mq'_{m-1}, & q'_{m-1}a'_{m-1} &= p'_ma'_m, \\ z'_mp'_m &= t'q'_m, & q'_ma'_m &= va''. \end{aligned}$$

记$z_1 = s, z'_1 = t, z'_{m+1} = t'$. 考虑下述情形:

(a) $s' = s, t' = t$. 那么$sa = sua'', ta' = tva'', f(su) = f(tv)$. 因为$A$满足条件(PWP),由定理4.2.17可知存在$a_1, a_2 \in A, p_1, p_2, q_1, q_2 \in S$,使得

$$\begin{aligned} & & a &= p_1a_1, \\ sp_1 &= sq_1, & q_1a_1 &= ua'', \\ & & a' &= p_2a_2, \\ tp_2 &= tq_2, & q_2a_2 &= va'', \end{aligned}$$

此即命题中情形(1).

(b) $s' = t$. 那么存在$k \in \{1, 2, \cdots, n\}$使得$z_k = s$而$z_{k+1} = z_{k+2} = \cdots = z_{n+1} = s' = t$. 这样

$$\begin{aligned} f(t)q_k a_k &= f(t)p_{k+1}a_{k+1} = f(z_{k+1}p_{k+1})a_{k+1} = f(z_{k+2}q_{k+1})a_{k+1} \\ &= f(z_{k+2})q_{k+1}a_{k+1} = f(z_{k+2})p_{k+2}a_{k+2} \\ &= \cdots = f(z_n)p_n a_n = f(z_n p_n)a_n = f(s'q_n)a_n \\ &= f(s')q_n a_n = f(s')ua'' = f(s'u)a'' = f(t'v)a'' \\ &= f(t')va'' = f(t')q'_m a'_m = f(t'q'_m)a'_m = f(z'_m p'_m)a'_m \\ &= f(z'_m)p'_m a'_m = \cdots = f(t)p'_1 a'_1 = f(t)a'. \end{aligned}$$

因为A满足条件(PWP),对等式$f(t)q_k a_k = f(t)a'$,存在$d_1 \in A, x_1, x_2 \in S$,使得$q_k a_k = x_1 d_1, x_2 d_1 = a', f(t)x_1 = f(t)x_2$. 而且

$$sa = sp_1 a_1 = z_2 q_1 a_1 = z_2 p_2 a_2 = \cdots = z_k p_k a_k = sp_k a_k$$

故等式$sa = sp_k a_k$推出$d_2 \in A, y_1, y_2 \in S$,使得$a = y_1 d_2, p_k a_k = y_2 d_2$并且$sy_1 = sy_2$. 所以有$f(tx_1) = f(tx_2)$以及

$$\begin{aligned} & & a &= y_1 d_2, \\ sy_1 &= sy_2, & y_2 d_2 &= p_k a_k, \\ & & q_k a_k &= x_1 d_1, \\ sp_k &= tq_k, & a' &= x_2 d_1, \end{aligned}$$

此即命题中情形(2).

(c) $t' = s$. 那么存在$l \in \{1, 2, \cdots, m\}$使得$z'_l = t$而$z'_{l+1} = z'_{l+2} = \cdots = z'_{m+1} = t' = s$. 利用和(b)的讨论同样的讨论办法可以得到命题中情形(3).

充分性 由命题4.2.13以及命题4.2.20显然. □

下面的命题给出了循环左S -系满足条件(WP)的等价刻画.

命题 4.2.22 设λ是幺半群S上的左同余. 循环左S -系S/λ满足条件(WP)当且仅当对任意的$s, t \in S$,任意的右S -同态$f : (sS \cup tS) \to S$以及$a, a' \in A$,若$f(s)\lambda f(t)$,则存在$u, v, p_1, p_2, q_1, q_2 \in S$,使得以下三种情形必居其一:

(1)$f(su) = f(tv)$以及

$$\begin{aligned} & & \overline{1} &= \overline{p_1}, \\ sp_1 &= sq_1, & \overline{q_1} &= \overline{u}, \\ & & \overline{1} &= \overline{p_2}, \\ tp_2 &= tq_2, & \overline{q_2} &= \overline{v}, \end{aligned}$$

(2)$f(tu) = f(tv)$以及

$$\begin{aligned} & & \bar{1} &= \overline{p_1}, \\ sp_1 &= sq_1, & \overline{q_1} &= \overline{p_2}, \\ sp_2 &= tq_2, & \overline{q_2} &= \bar{u}, \\ & & \bar{1} &= \bar{v}. \end{aligned}$$

(3)$f(su) = f(sv)$以及

$$\begin{aligned} & & \bar{1} &= \overline{p_1}, \\ tp_1 &= tq_1, & \overline{q_1} &= \overline{p_2}, \\ tp_2 &= sq_2, & \overline{q_2} &= \bar{v}, \\ & & \bar{1} &= \bar{u}, \end{aligned}$$

证明 由命题4.2.21显然. □

§4.3 均衡平坦性与条件(E)

称交换图

$$C \xrightarrow{f} A \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} B$$

为均衡图,如果对任意$a \in A$,若$\alpha(a) = \beta(a)$,则存在唯一的$c \in C$使得$a = f(c)$. 显然上图为均衡图的充要条件是f单,且

$$\mathrm{Im} f = \{a \in A | \alpha(a) = \beta(a)\}.$$

上述定义中的A, B, C可以是集合,也可以是左S-系或右S-系,相应地α, β, f为映射或S-同态.

例 4.3.1 设$f: C \to A$为左S-系的单同态.记$I = f(C) \leqslant A$,则下图是均衡图.

$$C \xrightarrow{f} A \underset{\theta}{\overset{\pi}{\rightrightarrows}} A/\lambda_I$$

这里$\theta(a) = 0$, $\pi(a) = a\lambda_I, a \in A$. 事实上, $\pi f = \theta f$是显然的.设$a \in A$使得$\pi(a) = \theta(a)$,则$\pi(a) = 0$,故$a \in I$, 所以存在唯一的$c \in C$使得$f(c) = a$.

命题 4.3.2 设

$$C \xrightarrow{f} A \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} B$$

为均衡图,则$C \simeq \{a \in A|\alpha(a) = \beta(a)\} = D$, 且图

$$D \xrightarrow{g} A \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} B$$

仍为均衡图,其中g为自然的包含同态.

证明 根据均衡图的定义立得. □

定义 4.3.3 设A是左S -系,称A是均衡平坦的,如果函子$- \otimes A$ 把Act-S中的均衡图变为Set中的均衡图.

例如, ${}_SS$是均衡平坦的,从而自由系是均衡平坦的.

定义 4.3.4 称左S -系A满足条件(E), 如果对于任意s, $t \in S$, 任意$a \in A$, 若$sa = ta$,则存在$a' \in A, u \in S$,使得$su = tu, a = ua'$.

例 4.3.5 设J是S的真左理想,则$A(J)$满足条件(E). 这可由$A(J)$的构造以及条件(E)的定义来验证.

均衡平坦性和条件(E)的关系为:

定理 4.3.6 均衡平坦系一定满足条件(E).

证明 设A是均衡平坦左S -系, $a \in A, s, t \in S$,且$sa = ta$. 定义S -同态$\alpha, \beta : S \to S$ 为 : $\alpha(x) = sx, \beta(x) = tx, x \in S$.令$D = \{x|\alpha(x) = \beta(x), x \in S\}$, $f : D \to S$为包含同态. 由均衡图

$$D \xrightarrow{f} S \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} S$$

可得均衡图:

$$D \otimes A \xrightarrow{f \otimes 1} S \otimes A \underset{\beta \otimes 1}{\overset{\alpha \otimes 1}{\rightrightarrows}} S \otimes A.$$

因为$sa = ta$,所以$(\alpha \otimes 1)(1 \otimes a) = s \otimes a = 1 \otimes sa = 1 \otimes ta = t \otimes a = (\beta \otimes 1)(1 \otimes a)$,因此存在$d \otimes a' \in D \otimes A$,使得在$S \otimes A$中有$1 \otimes a = (f \otimes 1)(d \otimes a') = f(d) \otimes a' = d \otimes a' = 1 \otimes da'$. 所以$a = da'$,且$sd = td$.故$A$满足条件(E). □

均衡平坦性与平坦性的关系为

定理 4.3.7 均衡平坦系一定是平坦的.

证明 设A是均衡平坦S -系, Y是右S -系, $X \leqslant Y$.令$\rho = \rho_X$,规定同态$\pi : Y \to Y/\rho$ 为 $\pi(y) = y\rho$, $\theta : Y \to Y/\rho$ 为 $\theta(y) = 0$. 由例4.3.1知

$$X \xrightarrow{f} Y \underset{\theta}{\overset{\pi}{\rightrightarrows}} Y/\rho$$

是均衡图,其中f为自然的包含同态.由条件可知

$$X \otimes A \xrightarrow{f \otimes 1} Y \otimes A \underset{\theta \otimes 1}{\overset{\pi \otimes 1}{\rightrightarrows}} Y/\rho \otimes A$$

也是均衡图. 所以$f \otimes 1$是单映射,从而A是平坦的. □

下面的例子说明满足条件(E)的S -系不一定是平坦的,从而也不一定是均衡平坦的.

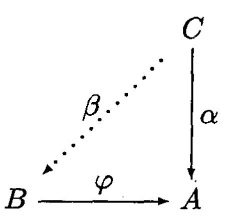
例 4.3.8 设$S = (N, \cdot)$, $J = 2\mathbb{N}$,则J是S的真理想.已知$A(J)$满足条件(E). 如果$A(J)$是平坦的,则由命题5.2.2知对任意的$m \in 2\mathbb{N}$,必有$m \in m(2\mathbb{N})$.特别地有$2 \in 4\mathbb{N}$,矛盾. 矛盾说明$A(J)$不是平坦的.

为了给出条件(E)的等价刻画,我们先引入下述概念.

定义 4.3.9 设A, B是S -系, $\varphi : B \to A$是满同态.称φ是1-纯的,如果对于任意$a \in A$和任意一组等式$s_i a = t_i a, i = 1, \cdots, n$, 存在$b \in B$,使得$\varphi(b) = a$,且$s_i b = t_i b, i = 1, \cdots ; n$.

定义 4.3.10 称S -系A为有限表示的,如果$A \simeq F/\lambda$,其中F为有限生成自由系, λ为F上的有限生成同余.

引理 4.3.11 满同态$\varphi : B \to A$ 是1-纯的当且仅当对于任意循环有限表示S -系 C 和任意 S -同态$\alpha : C \to A$,存在S -同态$\beta : C \to B$使得下图可换:



证明 设$\varphi : B \to A$是1-纯的, C是循环有限表示S -系,$\alpha : C \to A$是S -同态. 不妨设$C = S/\lambda$,其中λ是由$\{(s_i, t_i) | i = 1, \cdots, n\}$生成的$S$上的左同余.显然有$s_i\alpha(1\lambda) = \alpha(s_i\lambda) = \alpha(t_i\lambda) = t_i\alpha(1\lambda), i = 1, \cdots, n$. 由$\varphi$的1-纯性知存在$b \in B$,使得$s_i b = t_i b, i = 1, \cdots, n$,且$\varphi(b) = \alpha(1\lambda)$.定义$\beta : C \to B$为$\beta(s\lambda) = sb$.由命题1.1.3容易证明$\beta$是有定义的.显然$\beta$是$S$ -同态且$\alpha = \varphi\beta$.

反之,设$\varphi : B \to A$是满同态, $a \in A, s_i, t_i \in S$,满足$s_i a = t_i a, i = 1, \cdots, n$.令$H = \{(s_i, t_i) | i = 1, \cdots, n\}, \lambda = \lambda(H)$是由$H$生成的最小左同余,

$C = S/\lambda$, $\alpha : C \to A$定义为$\alpha(s\lambda) = sa$. 容易证明α是S -同态.由条件可知存在同态$\beta : C \to B$使得$\alpha = \varphi\beta$. 所以有$s_i\beta(1\lambda) = \beta(s_i\lambda) = \beta(t_i\lambda) = t_i\beta(1\lambda)$,且 $\varphi\beta(1\lambda) = \alpha(1\lambda) = 1 \cdot a = a$,即$\varphi : B \to A$是1-纯的. □

引理 4.3.12 设S -系A满足条件(E). 如果$a \in A, s_i, t_i \in S$,使得$s_i a = t_i a, i = 1, \cdots, n$, 那么存在$a' \in A, u \in S$, 使得$a = ua', s_i u = t_i u, i = 1, \cdots, n$.

证明 用数学归纳法容易证明. □

现在就可以给出条件(E)的等价刻画.下述定理是Normak 文章[198]中的结果.

定理 4.3.13 设A是S -系.如下几条是等价的:

(1) A满足条件(E);

(2) 任意满同态$\varphi : B \to A$是1-纯的;

(3) 存在1-纯的满同态$\varphi : B \to A$使得B是均衡平坦的;

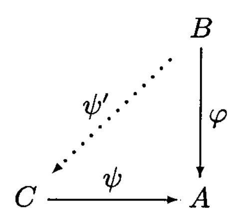
(4)对于任意循环有限表示S -系B以及S -同态$\varphi : B \to A$,存在自由S -系F以及S -同态$\alpha : B \to F, \beta : F \to A$使得$\varphi = \beta\alpha$;

(5)对于任意循环有限表示S -系 B 以及 S -同态 $\varphi : B \to A$, 存在均衡平坦S -系M以及S -同态$\alpha : B \to M, \beta : M \to A$使得$\varphi = \beta\alpha$.

证明 (1)⇒(2)设$\varphi : B \to A$是满同态. 考虑A上的等式组$s_i a = t_i a, i = 1, \cdots, n$, 这里$a \in A, s_i, t_i \in S$.由引理4.3.12知存在$u \in S, a' \in A$使得$s_i u = t_i u, i = 1, \cdots, n, a = ua'$.设$b \in B$满足$\varphi(b) = a'$. 则$s_i ub = t_i ub, i = 1, \cdots, n$, $\varphi(ub) = u\varphi(b) = ua' = a$.所以$\varphi$是1-纯的.

(2)⇒(3)由命题2.1.11即得结论.

(3)⇒(4)设B是循环有限表示S -系, $\varphi : B \to A$是S -同态.不妨设$B = S/\lambda$,其中λ是由$\{(s_i, t_i) | i = 1, \cdots, n\}$生成的$S$上的左同余.由(3)知存在1-纯的满同态$\psi : C \to A$使得$C$是均衡平坦的. 所以由引理4.3.11知存在同态$\psi' : B \to C$使得下图可换:



因为$s_i\psi'(1\lambda) = \psi'(s_i\lambda) = \psi'(t_i\lambda) = t_i\psi'(1\lambda)$, 而均衡平坦系满足条件(E), 所以由引理4.3.12知存在$u \in S, c \in C$,使得$s_i u = t_i u, i = 1, \cdots, n, \psi'(1\lambda) = uc$.定义同态$\alpha : B \to S$和$\beta : S \to A$分别为:

$$\alpha(s\lambda) = su, \quad \forall s \in S,$$
$$\beta(s) = \psi(sc), \quad \forall s \in S,$$

则有$\varphi = \beta\alpha$.

(4)⇒(5)因为自由系是均衡平坦系,所以结论立得.

(5)⇒(1)设$s,t \in S, a \in A$满足$sa = ta$.令λ是由(s,t)生成的最小左同余,规定映射$\varphi : S/\lambda \to A : \varphi(x\lambda) \doteq xa, x \in S$.容易证明$\varphi$是有定义的且是$S$ -同态.由(5)知存在均衡平坦S -系M和S -同态$\alpha : S/\lambda \to M, \beta : M \to A$使得$\varphi = \beta\alpha$. 显然$s\alpha(1\lambda) = \alpha(s\lambda) = \alpha(t\lambda) = t\alpha(1\lambda)$. 因为均衡平坦系满足条件(E),所以存在$m \in M, u \in S$使得$su = tu, \alpha(1\lambda) = um$. 因此$u\beta(m) = \beta(um) = \beta\alpha(1\lambda) = \varphi(1\lambda) = a$.即$A$满足条件(E). □

由该定理的证明可得如下的推论:

推论 4.3.14 设满同态$\varphi : B \to A$ 是1-纯的. 若B满足条件(E), 则A也满足条件(E).

命题 4.3.15 设λ是S的左同余,则循环S -系S/λ 满足条件(E)的充要条件是: 对于$s,t \in S$, 如果$s\lambda\, t$, 那么存在$u \in S$,使得$u\lambda 1$且$su = tu$.

证明 充分性 设$s,t \in S, a = x\lambda \in S/\lambda$满足$sa = ta$, 则$sx\lambda = tx\lambda$,所以$sx\lambda tx$. 由条件即知存在$u \in S$,使得$sxu = txu, u\lambda 1$,因此$a = x\lambda = x(1\lambda) = x(u\lambda) = xu\lambda$, 故令$a' = 1\lambda$即知$S/\lambda$满足条件(E).

必要性 设$s\lambda t, s,t \in S$, 则$s(1\lambda) = t(1\lambda)$. 所以由条件(E)知存在$u \in S$, $a' = x\lambda \in S/\lambda$, 使得$su = tu$, 且$1\lambda = u(x\lambda)$. 所以$1\lambda = ux\lambda$, 而显然$sux = tux$. □

定理 4.3.16 以下几条等价:

(1) 所有S -系是均衡平坦的;

(2) 所有S -系满足条件(E);

(3) 所有循环S -系是均衡平坦的;

(4) 所有循环S -系满足条件(E);

(5) $S = \{1\}$或$S = \{1,0\}$.

证明 (1)⇒(2)⇒(4)和(1)⇒(3)⇒(4)是显然的.

(4)⇒(5)取$u \in S$,定义S上的关系:

$$s\lambda t \Leftrightarrow \text{存在正整数 } k,l, \text{使得 } su^k = tu^l.$$

显然λ是S上的左同余. 由(4)即知S/λ满足条件(E). 因为$1\lambda u$, 所以由命题4.3.15知存在$v \in S$, 使得$v = uv, v\lambda 1$. 由λ的定义即知存在正整数k,l使得$u^k = vu^l$. 所以$u^{k+1} = uu^k = uvu^l = vu^l = u^k$. 因此对于任意$u \in S$,存在正整数$m$,使得$u^m$是幂等元.

设$1 \neq e \in E(S)$.由条件知S/λ_{Se}满足条件(E). 设$x \in Se$,则$x\lambda_{Se}e$.由命题4.3.15知存在$u \in S$, 使得$xu = eu, u\lambda_{Se}1$. 由此即得$u = 1$, 从而$x = e$. 这说明任意$s \in S, se = e$. 因此e是S的右零元.

设I是S的所有右零元构成的集合.若I非空,则I一定是S的左理想. 若$I = S$,则$S = \{1\}$. 所以下设$I \neq S$.由条件知S/λ_I满足条件(E). 取$x, y \in I$, 则$x\lambda_I y$.由命题4.3.15即知存在$u \in S$使得$xu = yu, u\lambda_I 1$. 所以$u = 1$, 从而$x = y$.这说明S具有唯一的右零元,因此S含有零元.

因此对任意$u \in S$,存在自然数m,使得

$$u^m = 1, \quad \text{或 } u^m = 0.$$

令

$$G = \{u \in S \mid u^m = 1\},$$
$$N = \{u \in S | u^m = 0\}.$$

则$S = G \dot{\cup} N$,从而容易证明G是S的子群, N是S的子半群. 取$g \in G$但$g \neq 1$.由开始的证明可知存在$v \in S$,使得$v = gv, g^k = vg^l$, 这里k和l是自然数. 由$g^k = vg^l$可知$v \in G$, 所以$g = 1$,矛盾. 这说明$S = \{1\} \dot{\cup} N$. 若$N = \emptyset$, 则$S = \{1\}$.

下设$N \neq \emptyset$.设$t \in N$,则存在自然数m使得$t^m = 0$.所以$t^{m-1}t = 0 = t^m t$. 因为St满足条件(E), 所以存在$u \in S, a = pt \in St$,使得

$$t^{m-1}u = t^m u, \quad t = ua = upt.$$

如果$up = 1$,则$t^{m-1} = t^m$. 如果我们把m取为满足$t^m = 0$的最小自然数,那么就得到矛盾. 所以$up \neq 1$,从而$up \in N$.因此存在自然数n使得$(up)^n = 0$. 所以,

$$t = upt = (up)^2 t = \cdots = (up)^n t = 0.$$

因此$N = \{0\}$.从而$S = \{1, 0\}$.

(5)⇒(1)若$S = \{1\}$,则所有S-系都是自由的,从而是均衡平坦的.所以下设$S = \{1, 0\}$.

设A是左S-系,下图是右S-系的均衡图:

$$K \xrightarrow{f} X \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} Y$$

其中

$$K = \{x \in X | \alpha(x) = \beta(x)\},$$

f是包含同态. 用函子$- \otimes A$作用可得交换图:

$$K \otimes A \xrightarrow{f \otimes 1} X \otimes A \underset{\beta \otimes 1}{\overset{\alpha \otimes 1}{\rightrightarrows}} Y \otimes A.$$

在第5章中将要证明若S是正则幺半群,则所有满足条件(E)的S -系是平坦的.因为$S=\{1,0\}$, 所以容易直接证明所有S -系都满足条件(E),从而所有S -系都是平坦的,特别地A是平坦系,所以$f\otimes 1$是单射.

设$x\otimes a\in X\otimes A$,满足$(\alpha\otimes 1)(x\otimes a)=(\beta\otimes 1)(x\otimes a)$.则$\alpha(x)\otimes a=\beta(x)\otimes a$. 所以存在$y_1,\cdots,y_n\in Y, a_2,\cdots,a_n\in A$, $s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n\in S$,使得

$$\begin{aligned}
&\alpha(x)=y_1s_1, && \\
&y_1t_1=y_2s_2, && s_1a=t_1a_2,\\
&y_2t_2=y_3s_3, && s_2a_2=t_2a_3,\\
&\quad\cdots\cdots && \quad\cdots\cdots\\
&y_nt_n=\beta(x), && s_na_n=t_na.
\end{aligned}$$

如果$s_1=\cdots=s_n=t_1=\cdots=t_n=1$, 则$\alpha(x)=y_1=y_2=\cdots=\beta(x)$, 因此$x\in K$, 从而 $x\otimes a\in K\otimes A$. 设 $s_1=t_n=0$, 则 $\alpha(x)=y_1s_1=y_10=y_20=\cdots=y_n0=y_nt_n=\beta(x)$, 所以 $x\in K$, 从而 $x\otimes a\in K\otimes A$. 设$s_1=1$. 如果 $t_1=0$, 那么 $a=0a_2=0a$, 又 $\alpha(x\cdot 0)=\alpha(x)0=y_10=y_20=\cdots=y_n0=\beta(x)0=\beta(x\cdot 0)$, 所以$x0\in K$.因此$x\otimes a=x\otimes 0a=x0\otimes a\in K\otimes A$. 如果$t_1=1$, 那么上述等式组中等式的个数可减少2, 从而可以利用数学归纳法. 若$t_n=1$,则和$s_1=1$时的证明类似地进行证明.因此A是均衡平坦的. □

例 4.3.17 令$S=\{1,0\}$,则由定理4.3.16知任意S -系都是均衡平坦的. 但S不是群, 所以存在不满足条件(P)(从而存在不是拉回平坦)的S -系. 例如令

$$A=\{x,y,z|0x=0y=0z=z,1x=x,1y=y,1z=z\},$$

则由命题4.2.8知A不满足条件(P),从而A不是拉回平坦的.

由定理4.3.7可知任意均衡平坦系一定是平坦的,但下面的例子说明平坦系不一定是均衡平坦的.

例 4.3.18 设G是群且$|G|\geqslant 2$.则由定理4.2.9知所有S -系都满足条件(P),从而所有S -系都是平坦的.但由4.3.16知存在不是均衡平坦的S -系.

§4.4 强平坦性及其推广

定义 4.4.1 称S -系A是强平坦的,如果它既是拉回平坦的, 又是均衡平坦的.

本节中我们要证明如下的主要定理4.4.2，其中(1)、(3)、(4)的等价性是文献[19]中的结果，(1)、(2)的等价性是文献[24]中的结果.

定理 4.4.2　设A是S -系.以下几条是等价的:

(1) A是强平坦的;

(2) A满足条件(P)和(E);

(3) A满足如下的条件

(PF) 若$sa = s'a', ta = t'a', a, a' \in A, s, t, s', t' \in S$,则存在$a'' \in A, u, v \in S$,使得

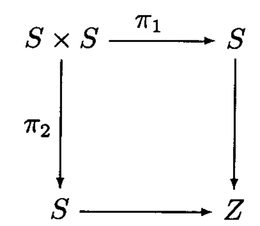
$$su = s'v, \qquad tu = t'v,$$
$$a = ua'', \qquad a' = va'';$$

(4) A是拉回平坦的.

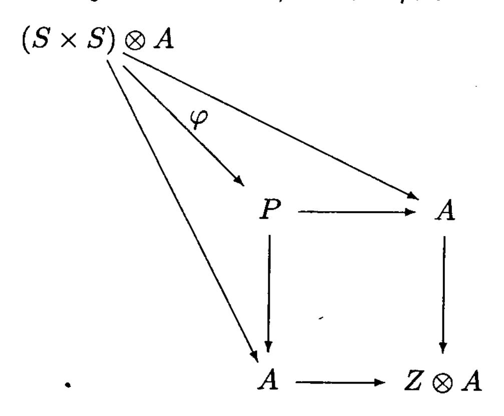
证明　(1)⇒(4) 显然.

(4)⇒(3)设A是拉回平坦的，$a, a' \in A, s, t, s', t' \in S$满足$sa = s'a', ta = t'a'$.

设$Z = \{z\}$是一元右S -系.考虑如下的右S -系拉回图:



其中π_1, π_2是自然的投射.由§4.2的讨论可知,下图中的φ是一一对应:



这里

$$P = \{(a_1, a_2) | z \otimes a_1 = z \otimes a_2, a_1, a_2 \in A\},$$

φ的定义为：

$$\varphi((p,q)\otimes a_1)=(pa_1,qa_1),\quad \forall\, a_1\in A,\quad \forall\, p,q\in S.$$

因为$sa=s'a',ta=t'a'$,所以$\varphi((s,t)\otimes a)=(sa,ta)=(s'a',t'a')=\varphi((s',t')\otimes a')$,从而在$(S\times S)\otimes A$中有$(s,t)\otimes a=(s',t')\otimes a'$.因为$A$是拉回平坦的,所以$A$满足条件(P). 因此由命题4.2.14知存在$a''\in A,u,v\in S$,使得

$$(s,t)u=(s',t')v,\quad a=ua'',\quad a'=va''.$$

所以条件(PF)成立.

(3)⇒(2) 在条件(PF)中,取$s=t,s'=t'$,则即得条件(P). 下面证明(PF)可推出(E).

设$a\in A,s,t\in S$满足$sa=ta$.对于等式组

$$sa=ta,\quad ta=sa$$

应用条件(PF)可知存在$a_1\in A,x,y\in S$使得：

$$sx=ty,\quad tx=sy,$$
$$a=xa_1,\quad a=ya_1.$$

对于等式组

$$1\cdot a=xa_1,\quad 1\cdot a=ya_1$$

应用条件(PF)可知存在$a''\in A,u,v\in S$,使得：

$$u=xv,\quad u=yv,$$
$$a=ua'',\quad a_1=va''.$$

所以$a=ua'',su=syv=txv=tu$. 即A满足条件(E).

(2)⇒(1) 先证明此时A是均衡平坦的.

设

$$K\xrightarrow{\ f\ }X\underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}}Y$$

是右 S - 系的均衡图, 不妨设 $K=\{x\in X|\alpha(x)=\beta(x)\}$, f 是包含同态. 用函子 $-\otimes A$作用后可得

$$K\otimes A\xrightarrow{f\otimes 1}X\otimes A\underset{\beta\otimes 1}{\overset{\alpha\otimes 1}{\rightrightarrows}}Y\otimes A.$$

令

$$L = \{x \otimes a \in X \otimes A | \alpha(x) \otimes a = \beta(x) \otimes a\}.$$

显然

$$K \otimes A = \{x \otimes a | a \in A, x \in X, \alpha(x) = \beta(x)\},$$

要证A是均衡平坦的,只需证明$L = K \otimes A$即可.显然$K \otimes A \subseteq L$.设$x \otimes a \in L$,则$\alpha(x) \otimes a = \beta(x) \otimes a$. 因为$A$满足条件(P),所以由命题4.2.14知存在$a_1 \in A, u, v \in S$,使得

$$a = ua_1, \quad a = va_1, \quad \alpha(x)u = \beta(x)v.$$

再由等式$ua_1 = va_1$及条件(E)可知存在$a'' \in A, t \in S$,使得$ut = vt, a_1 = ta''$. 所以$\alpha(xut) = \alpha(x)ut = \beta(x)vt = \beta(xvt) = \beta(xut)$,从而$xut \in K$,因此$xut \otimes a'' \in K \otimes A$. 而$x \otimes a = x \otimes ua_1 = xu \otimes a_1 = xu \otimes ta'' = xut \otimes a''$, 所以$x \otimes a \in K \otimes A$.因此有$L \subseteq K \otimes A$.总之有$L = K \otimes A$,故$A$是均衡平坦的.

下面证明A满足条件(PF). 设$s, s', t, t' \in S, a, a' \in A$满足$sa = s'a', ta = t'a'$.由条件(P)知存在$a_1 \in A, u_1, v_1 \in S$,使得:

$$a = u_1a_1, \quad a' = v_1a_1, \quad su_1 = s'v_1.$$

所以$tu_1a_1 = t'v_1a_1$.由条件(E)可知存在$a'' \in A, u \in S$,使得:

$$tu_1u = t'v_1u, \quad a_1 = ua''.$$

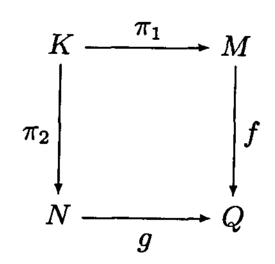
所以有:

$$a = u_1a_1 = u_1ua'', \qquad a' = v_1a_1 = v_1ua'',$$
$$su_1u = s'v_1u, \qquad tu_1u = t'v_1u.$$

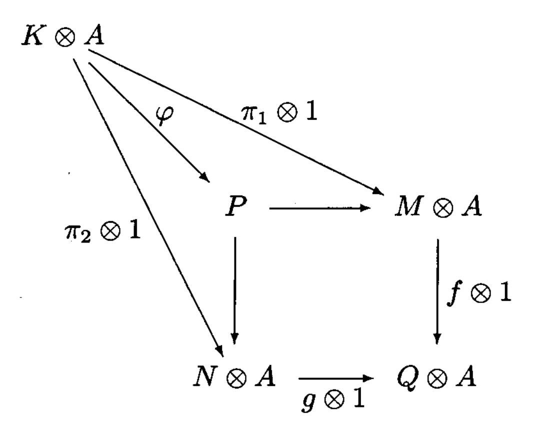
即A满足条件(PF).

最后证明A是拉回平坦的.

设有拉回图:



用函子$-\otimes A$作用后可得下图:



其中

$$P=\{(m\otimes a,n\otimes a')\in(M\otimes A)\times(N\otimes A)\mid f(m)\otimes a=g(n)\otimes a'\},$$

$$K=\{(m,n)\in M\times N|f(m)=g(n)\},$$

$$\varphi((m,n)\otimes a)=(m\otimes a,n\otimes a).$$

因为A满足条件(P), 所以由命题4.2.15知φ是满射.由§4.2的讨论可知,只需证明φ是单射即可.

设$a,a'\in A,m,m'\in M,n,n'\in N$, 满足$\varphi((m,n)\otimes a)=\varphi((m',n')\otimes a')$, 则有$(m\otimes a,n\otimes a)=(m'\otimes a',n'\otimes a')$, 所以$m\otimes a=m'\otimes a',n\otimes a=n'\otimes a'$. 由命题4.2.14知存在$u_1,v_1,u_2,v_2\in S,a_1,a_2\in A$,使得:

$$a=u_1a_1,\quad a'=v_1a_1,\quad mu_1=m'v_1,$$
$$a=u_2a_2,\quad a'=v_2a_2,\quad nu_2=n'v_2.$$

对于等式组

$$u_1a_1=u_2a_2,\quad v_1a_1=v_2a_2,$$

利用条件(PF)可知存在$a''\in A,u,v\in S$,使得:

$$a_1=ua'',\qquad a_2=va'',$$
$$u_1u=u_2v,\quad v_1u=v_2v.$$

所以, $mu_1u=m'v_1u=m'v_2v$, $nu_1u=nu_2v=n'v_2v$, 从而$(m,n)\otimes a=(m,n)\otimes u_1a_1=(m,n)\otimes u_1ua''=(m,n)u_1u\otimes a''=(mu_1u,nu_1u)\otimes a''=$

$(m'v_2v, n'v_2v) \otimes a'' = (m', n')v_2v \otimes a'' = (m', n') \otimes v_2va'' = (m', n') \otimes v_2a_2 = (m', n') \otimes a'$. □

这个定理说明拉回平坦和强平坦是一致的，从而拉回平坦系一定是均衡平坦系.

强平坦系的概念是由B. Stenström 于 1971 年引入的, 其原始定义为: 函子 $-\otimes A$ 把Act-S中的拉回图与均衡图变为Set中的拉回图与均衡图. 拉回平坦的概念是由Normak于1987年引入的.Bulman-Fleming 于1991年证明了拉回平坦实际上就是强平坦,即定理4.4.2,所以我们以后不加区分地使用强平坦和拉回平坦的概念.

定理 4.4.3　投射系是强平坦系.

证明　设A是投射系,不妨假定$A = \coprod_{i\in I} Se_i$, $e_i \in E(S)$. 设$s, s' \in S, a, a' \in A$,满足$sa = s'a'$. 由A的结构可知存在$i \in I$,使得$a = ue_i, a' = ve_i$. 所以,

$$a = ue_i \cdot e_i,\quad a' = ve_i \cdot e_i,\quad sue_i = s've_i,$$

即A满足条件(P). 同理可以证明A满足条件(E). 所以由定理4.4.2即知A是强平坦系. □

推论 4.4.4　投射系是均衡平坦的.

引理 4.4.5　设左S-系A满足条件(P).如果$a_i \in A, s_i, t_i \in S, i = 1, \cdots, n$,满足$s_ia_i = t_ia_{i+1} (i = 1, \cdots, n)$, 那么存在$u_i, v_i \in S, i = 1, \cdots, n, a \in A$,使得

$$a_i = u_ia,\quad a_{i+1} = v_ia,\quad s_iu_i = t_iv_i,\quad i = 1, \cdots, n.$$

证明　利用数学归纳法容易证明. □

命题 4.4.6　设S-系A满足条件(E),则如下两条等价:

(1) A是强平坦的;

(2) 若a', a''是A的同一个不可分分量中的元素,则存在$a \in A, u, v \in S$,使得$a' = ua, a'' = va$.

证明　(1)⇒(2) 设A是强平坦的,则A满足条件(P). 若a', a''在A的同一个不可分分量中,则由命题1.3.6知存在$s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S, a_1, \cdots, a_{n-1} \in A$,使得:

$$\begin{aligned} s_1a' &= t_1a_1, \\ s_2a_1 &= t_2a_2, \\ s_3a_2 &= t_3a_3, \\ &\cdots\cdots \\ s_na_{n-1} &= t_na''. \end{aligned}$$

由引理4.4.5知存在$u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n \in S, a \in A$,使得:

$$\begin{array}{lll} a' = u_1 a, & a_1 = v_1 a, & s_1 u_1 = t_1 v_1, \\ a_1 = u_2 a, & a_2 = v_2 a, & s_2 u_2 = t_2 v_2, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n-1} = u_n a, & a'' = v_n a, & s_n u_n = t_n v_n. \end{array}$$

由此即知(2)成立.

(2)⇒(1)由定理4.4.2, 我们只需证明A满足条件(P)即可. 设$s, t \in S, a, a' \in A$满足$sa = ta'$. 则由(2)知存在$a'' \in A, u, v \in S$,使得$a = ua'', a' = va''$. 所以有$sua'' = tva''$. 由条件(E)知存在$x \in S, a_1 \in A$,使得$a'' = xa_1, sux = tvx$. 所以, $a = ua'' = uxa_1, a' = va'' = vxa_1$, 即$A$满足条件(P). □

定理 4.4.7 设$A = Sa$是循环S-系,则A是强平坦的当且仅当A满足条件(E).

证明 只需证明充分性.

设A满足条件(E),由定理4.4.2我们只需证明A满足条件(P)即可.

设$s, t \in S, b, b' \in A$, 满足$sb = tb'$. 因为$b = ua, b' = va, u, v \in S$, 所以$sua = tva$,由条件(E)知存在$x \in S, b'' = pa \in A$,使得$sux = tvx, a = xpa$.由此即知$A$满足条件(P). □

推论 4.4.8 设$A = Sa$是循环S-系.则A是强平坦的当且仅当对于$s, t \in S$,如果$sa = ta$,那么存在$u \in S$,使得$su = tu$, 且$a = ua$.

证明 由定理4.4.7及其证明即得. □

由定理4.2.12即得如下定理:

定理 4.4.9 所有S-系都是强平坦的当且仅当$S = \{1\}$.

由定理4.3.16和定理4.4.7得

定理 4.4.10 所有循环S-系都是强平坦的当且仅当$S = \{1\}$, 或$S = \{1,0\}$.

定义 4.4.11 称幺半群S是左PSF幺半群, 如果S的任意主左理想作为S-系是强平坦的.

因为投射系是强平坦系,所以左PP幺半群一定是左PSF的.因此,正则幺半群和右可消幺半群都是左PSF的.

关于左PP幺半群的研究成果已非常丰富. 但是对于左PSF幺半群, 自从文献[185]中引入以来,只有少数研究成果出现(见§4.5及§5.3、§5.5等),希望对这类半群能有更多的研究成果面世.

定义 4.4.12 设S是幺半群, $u \in S$.称u是右半可消的,如果对于$s, t \in S$,若$su = tu$,则存在$r \in S$,使得$ru = u, sr = tr$.

显然, S中的e可消元都是右半可消的.

定理 4.4.13 如下几条是等价的:

(1) S是左PSF幺半群;

(2) S的任意主左理想可由右半可消元生成;

(3) S的任意元素都是右半可消元.

证明 (1)⇒(3)取$u \in S$,设$s, t \in S$满足$su = tu$.因为Su是强平坦的,所以满足条件(E),故存在$v \in Su, p \in S$,使得$u = pv, sp = tp$.而$v = qu$,这里$q \in S$.所以有$u = pqu, spq = tpq$.这说明u是S的右半可消元.

(3)⇒(2)显然.

(2)⇒(1)由推论4.4.8即得. □

同理可以定义并讨论右PSF幺半群以及左半可消元.

在文献[19]的定理2.3和2.4的证明中蕴含了下面的命题,它利用拉回图刻画了强平坦性.

命题 4.4.14 对于左S -系A,下述条件等价:

(1)右S -系范畴中任意拉回图$P(M, N, f, g, Q)$的映射φ是双射;

(2)右S -系范畴中任意拉回图$P(M, M, f, g, Q)$的映射φ是双射;

(3) A满足条件(P)和条件(E).

证明 只需注意(1)就是拉回平坦, 由命题4.4.2的证明过程以及命题4.2.15可知结论显然. □

下面我们给出强平坦性质的推广.

在文献[165]中, Laan 提出了条件(O), 作为拉回平坦概念的推广, 证明了右 S -系A满足条件(O)当且仅当A满足条件(P)和下述的条件(E′):

$$(\mathrm{E}') \qquad (\forall\ a \in A)(\forall\ s, s', z \in S)(sa = s'a \wedge zs = zs' \\ \Rightarrow (\exists\ a' \in A)(\exists\ u \in S)(a = ua' \wedge su = s'u)).$$

同时也给出下述的条件(PF′)作为文献[19]中条件(PF)的推广.

$$(\mathrm{PF}') \quad (\forall\ a, a' \in A)(\forall s, s', t, t', z, w \in S)(zs = wt \wedge \\ zs' = wt' \wedge sa = s'a' \wedge ta = t'a' \Rightarrow (\exists\ a'' \in A) \\ (\exists u, v \in S)(a = ua'' \wedge a' = va'' \wedge su = s'v \wedge tu = t'v)).$$

由于条件(O)恰好介于拉回平坦和条件(P)之间,所以在文献[168]中被称为弱拉回平坦. 下面的命题4.4.15是文献[168]中的结果,其中(3)、(4)、(5)的等价性是文献[165]中的结果.

命题 4.4.15 对于左S-系A,下述条件等价:

(1) 右S-系范畴中任意拉回图$P(I,I,f,g,S)$的映射φ是双射,其中I是S的右理想;

(2) 右S-系范畴中任意拉回图$P(sS,sS,f,g,S)$的映射φ是双射,其中$s\in S$;

(3) 右S-系范畴中任意拉回图$P(S,S;f,g,S)$的映射φ是双射;

(4) A满足条件(PF$'$);

(5) A满足条件(P)和条件(E$'$).

证明 (1)$\Rightarrow$(2)$\Rightarrow$(3) 显然.

(3)$\Rightarrow$(4) 假设右S-系范畴中任意拉回图$P(S,S,f,g,S)$的映射φ是双射, 因为φ是满的, 由命题4.2.15可知A满足条件(P). 设$a,a'\in A, s,s',t,t',z,w\in S$, 使得$zs=wt, zs'=wt', sa=s'a', ta=t'a'$. 设$f,g$是如下定义的由$S$到自身的右$S$-同态

$$f(u)=zu,\quad g(u)=wu,\quad \forall\, u\in S,$$

那么$f(s)=g(t)$, $f(s')=g(t')$. 由$sa=s'a', ta=t'a'$及命题4.1.3可得$s\otimes a=s'\otimes a', t\otimes a=t'\otimes a'$. 这说明对右$S$-系范畴中拉回图$P(S,S,f,g,S)$的映射$\varphi$有$\varphi((s,t)\otimes a)=\varphi((s',t')\otimes a')$. 因为$\varphi$是单射, 所以在$K\otimes A$中$(s,t)\otimes a=(s',t')\otimes a'$, 其中$K=\{(s,t)\in S\times S|f(s)=g(t)\}$. 由于$A$满足条件(P), 由命题4.2.14知存在$a''\in A$, $u,v\in S$,使得$a=ua'', a'=va''$以及$(s,t)u=(s',t')v$, 故有$su=s'v, tu=t'v$.

(4)$\Rightarrow$(5) 在条件(PF$'$)中取$s=t, s'=t', z=w=1$可证条件(P)成立. 现假设$a\in A, s,s',z\in S$使得$sa=s'a, zs=zs'$. 则由$sa=s'a, 1a=1a, zs=zs1, zs'=zs1$及条件(PF$'$)可知存在$a''\in A, u,v\in S$使得$su=s'v, 1u=1v$以及$a=ua''$, 此即条件(E$'$).

(5)$\Rightarrow$(1) 因为A满足条件(P),由命题4.2.15知右S-系范畴中任意拉回图$P(I,I,f,g,S)$的映射φ是满射.下证S-系范畴中任意拉回图$P(I,I,f,g,S)$的映射φ也是单射. 对该交换图,设存在$i,i',j,j'\in I$, $a,a'\in A$,使得

$$f(i)=g(j),\qquad \text{在 } I\otimes S \text{ 中}\quad i\otimes a=i'\otimes a',$$
$$f(i')=g(j'),\qquad \text{在 } I\otimes S \text{ 中}\quad j\otimes a=j'\otimes a'.$$

则等式$i\otimes a=i'\otimes a'$和$j\otimes a=j'\otimes a'$在$S\otimes A$中成立. 由引理, $ia=i'a'$, $ja=j'a'$. 由条件(P)以及等式$ia=i'a'$, 存在$u_1,v_1\in S$, $b\in A$,使得$a=u_1b, a'=v_1b$, $iu_1=i'v_1$. 因此, $ju_1b=ja=j'a'=j'v_1b$. 再次利用条件(P), 由等式$ju_1b=j'v_1b$, 存在$u_2,v_2\in S$, $d\in A$,使得$b=u_2d=v_2d$, $ju_1u_2=j'v_1v_2$.

因此

$$
\begin{aligned}
g(j)u_1u_2 &= g(ju_1u_2) = g(j'v_1v_2) = g(j')v_1v_2 \\
&= f(i'v_1v_2) = f(i'v_1)v_2 = f(iu_1)v_2 \\
&= f(i)u_1v_2 = g(j)u_1v_2.
\end{aligned}
$$

由等式$u_2d = v_2d$, $(g(j)u_1)u_2 = (g(j)u_1)v_2$及条件(E$'$), 存在$w \in S$, $a'' \in A$,使得$d = wa''$, $u_2w = v_2w$. 所以

$$
\begin{aligned}
(i,j)\otimes a &= (i,j)\otimes u_1b = (i,j)\otimes u_1u_2d = (i,j)\otimes u_1u_2wa'' \\
&= (iu_1u_2w, ju_1u_2w)\otimes a'' = (i'v_1v_2w, j'v_1v_2w)\otimes a'' \\
&= (i',j')\otimes v_1v_2wa'' = (i',j')\otimes v_1v_2d = (i',j')\otimes v_1b \\
&= (i',j')\otimes a'.
\end{aligned}
$$

在$P\otimes A$中成立，其中$P = \{(m,n)|f(m) = g(n)\}$.故拉回图$P(I,I,f,g,S)$的映射$\varphi$也是单射. □

定义 4.4.16　称左 S -系 A 是 弱 kernel 平坦的, 如果对 S 的任意右理想 I, 右S -系拉回图$P(I,I,f,f,S)$的映射φ是双射.

下列命题给出了弱kernel平坦性质的刻画.

命题 4.4.17　左S -系A是弱kernel平坦的当且仅当A满足条件(WP)并且对S的任意右理想I以及右S -同态$f: I\to S$, 以下条件成立:

任意的$a, a'\in A, s, s', t, t'\in I$,

$$
\left.\begin{array}{l}
\text{在 } I\otimes A \text{ 中 } s\otimes a = s'\otimes a', \text{ 并且 } f(s) = f(t) \\
\text{在 } I\otimes A \text{ 中 } t\otimes a = t'\otimes a', \text{ 并且 } f(s') = f(t')
\end{array}\right\} \Rightarrow
$$

$(s,t)\otimes a = (s',t')\otimes a'$在$\mathrm{Ker}f\otimes A$中成立.

证明　利用定义显然. □

推论 4.4.18　循环左S -系S/λ是弱kernel平坦的当且仅当S/λ满足条件(WP)并且对S的任意右理想I以及右S -同态$f: I\to S$, 以下条件成立:

任意的$s, s', t, t'\in I$,

$$
\left.\begin{array}{l}
\text{在 } I\otimes S/\lambda \text{ 中 } s\otimes \bar{1} = s'\otimes \bar{1}, \text{ 并且 } f(s) = f(t) \\
\text{在 } I\otimes S/\lambda \text{ 中 } t\otimes \bar{1} = t'\otimes \bar{1}, \text{ 并且 } f(s') = f(t')
\end{array}\right\} \Rightarrow
$$

$(s,t)\otimes \bar{1} = (s',t')\otimes \bar{1}$在$\mathrm{Ker}f\otimes S/\lambda$中成立.

定义 4.4.19 称左S -系 A 是主弱 kernel 平坦的, 如果对任意的 $s \in S$, 右S -系的任意拉回图$P(sS, sS, f, f, S)$的映射φ是双射.

命题 4.4.20 左S -系A是主弱kernel平坦的当且仅当A满足条件(PWP)以及下述的条件: 任意的$a, a' \in A$, 任意的$s, s', t, t', z, x \in S$, 若$\ker\lambda_x \subseteq \ker\lambda_z$, 则

$$\left.\begin{array}{l} xsa = xs'a', \quad zs = zt \\ xta = xt'a', \quad zs' = zt' \end{array}\right\} \Rightarrow (xs, xt) \otimes a = (xs', xt') \otimes a'$$

在$P \otimes A$中成立. 其中$P = \{(xu, xv) | u, v \in S, \ zu = zv\}$, λ_x, λ_z为S上的左平移.

证明 必要性 设A是主弱kernel平坦的,则由定义A满足条件(PWP). 假设任意的$a, a' \in A$, 任意的$s, s', t, t', z, x \in S$, 使得$\ker\lambda_x \subseteq \ker\lambda_z$, 并且

$$xsa = xs'a', \qquad zs = zt,$$
$$xta = xt'a', \qquad zs' = zt'.$$

定义映射$f : xS \to S$为$f(xs) = zs, \forall\ s \in S$. 因为$\ker\lambda_x \subseteq \ker\lambda_z$, f是有定义的,并且是S -同态. 对等式$xsa = xs'a'$, 由A满足条件(PWP), 存在$b \in A$, $u, v \in S$,使得$sa = ub$, $s'a' = vb$, $xu = xv$. 因此

$$xs \otimes a = x \otimes sa = x \otimes ub = xu \otimes b$$
$$= xv \otimes b = x \otimes vb = x \otimes s'a' = xs' \otimes a'$$

在$xS \otimes A$中成立. 类似地, $xt \otimes a = xt' \otimes a'$在$xS \otimes A$中成立. 因为$A$是主弱kernel平坦的, 由等式组

$$xs \otimes a = xs' \otimes a', \qquad f(xs) = f(xt),$$
$$xt \otimes a = xt' \otimes a', \qquad f(xs') = f(xt')$$

可得

$$(xs, xt) \otimes a = (xs', xt') \otimes a$$

在$P \otimes A$中成立. 其中

$$P = \{(xu, xv) \in xS \times xS \mid f(xu) = f(xv)\}$$
$$= \{(xu, xv) \in xS \times xS \mid zu = zv\}.$$

充分性 设$x \in S$, φ是对应于左S -系A和右S -系拉回图$P(xS, xS, f, f, S)$的映射. 由条件(PWP)可得φ是满的. 对任意的$a, a' \in A$, $s, s', t, t', x \in S$, 设

在 $xS \otimes A$ 中, $xs \otimes a = xs' \otimes a'$, 并且 $f(xs) = f(xt)$

在 $xS \otimes A$ 中, $xt \otimes a = xt' \otimes a'$, 并且 $f(xs') = f(xt')$

那么

$$xsa = xs'a', \quad zs = zt,$$
$$xta = xt'a', \quad zs' = zt'.$$

其中$z = f(x)$. 由假设

$$在P \otimes A中, \quad (xs, xt) \otimes a = (xs', xt') \otimes a'.$$

其中 $P = \{(xu, xv)|u, v \in S, zu = zv\}$. 因此$\varphi$是单的, 故 A 是主弱 kernel 平坦的. □

推论 4.4.21 循环左S-系S/λ是主弱kernel平坦的当且仅当A满足条件(PWP)以及下述的条件：任意的$s, s', t, t', z, x \in S$, 若$\ker\lambda_x \subseteq \ker\lambda_z$，则

$$\left.\begin{array}{l} xs\lambda xs', \quad zs = zt \\ xt\lambda xt', \quad zs' = zt' \end{array}\right\} \Rightarrow (xs, xt) \otimes \bar{1} = (xs', xt') \otimes \bar{1}$$

在$P \otimes A$中成立. 其中$P = \{(xu, xv)|u, v \in S, \ zu = zv\}$.

定义 4.4.22 称左S-系A是平移kernel平坦的, 如果右S-系的任意拉回图$P(S, S, f, f, S)$的映射φ是双射.

命题 4.4.23 左S-系A是平移kernel平坦的当且仅当A满足条件(PWP)以及下述的条件：对任意的$a, a' \in A$, $s, s', t, t', z, x \in S$,

$$\left.\begin{array}{l} sa = s'a', \quad zs = zt \\ ta = t'a', \quad zs' = zt' \end{array}\right\} \Rightarrow (s, t) \otimes a = (s', t') \otimes a'$$

在$\ker\lambda_z \otimes A$中成立.

证明　必要性　设A是平移kernel平坦的. 则由定义A满足条件(PWP). 假设任意的$a, a' \in A$, 任意的$s, s', t, t', z \in S$, 使得

$$sa = s'a', \quad zs = zt$$
$$ta = t'a', \quad zs' = zt'$$

由右S-系范畴中拉回图$P(S, S, \lambda_z, \lambda_z, S)$的映射$\varphi$的单性可得在$P \otimes A$中，$(s, t) \otimes a = (s', t') \otimes a'$, 其中$P = \ker\lambda_z$.

充分性　设A是左S-系, φ是对应于A和右S-系范畴中拉回图$P(S, S, f, f, S)$的映射. 由条件(PWP)可得φ是满的. 对任意的$a, a' \in A$, $s, s', t, t' \in S$, 若

$$s \otimes a = s' \otimes a', \quad f(s) = f(t)$$
$$t \otimes a = t' \otimes a', \quad f(s') = f(t')$$

那么

$$sa = s'a', \quad f(1)s = f(1)t$$
$$ta = t'a', \quad f(1)s' = f(1)t'$$

由假设

$$\text{在 } P \otimes A\text{中}, \quad (s,t) \otimes a = (s',t') \otimes a'.$$

其中$P = \{(u,v)|u,v \in S, f(1)u = f(1)v\} = \ker f$. 因此$\varphi$是单的，故$A$是平移kernel平坦的. □

推论 4.4.24 左S-系S/λ是平移kernel平坦的当且仅当S/λ满足条件(PWP)以及下述的条件：对任意的$s,s',t,t',z \in S$,

$$\left.\begin{matrix} s\lambda s', & zs = zt \\ t\lambda t', & zs' = zt' \end{matrix}\right\} \Rightarrow (s,t) \otimes \bar{1} = (s',t') \otimes \bar{1}$$

在$\ker\lambda_z \otimes A$中成立.

§4.5 弱 平 坦 性

定义 4.5.1 称S-系A是弱平坦的,如果对于S的任意右理想I,映射$I \otimes A \to S \otimes A$是单的. 称$S$-系$A$是主弱平坦的,如果对于$S$的任意主右理想$I$, 映射$I \otimes A \to S \otimes A$是单的.

显然,平坦系一定是弱平坦的,弱平坦系一定是主弱平坦的. 因为$S \otimes A \simeq A$,所以A是(主)弱平坦的当且仅当对于任意(主)右理想I,映射$I \otimes A \xrightarrow{f} A$, $f(x \otimes a) = xa$是单的.

定理 4.5.2 对于S-系A,如下几条是等价的:

(1) A是弱平坦的;

(2) A是主弱平坦的,且对于S的任意右理想I, J, $IA \cap JA = (I \cap J)A$;

(3) A是主弱平坦的,且对于任意$x, y \in S$,任意$a, a' \in A$,若$xa = ya'$,则存在$a'' \in A$, $z \in xS \cap yS$, 使得$xa = ya' = za''$.

证明 (1)⇒(3)设$xa = ya'$, $x, y \in S$, $a, a' \in A$.则在$S \otimes A$中有$x \otimes a = y \otimes a'$. 由$A$的弱平坦性可知在$(xS \cup yS) \otimes A$中有$x \otimes a = y \otimes a'$,所以存在$x_1, \cdots, x_n \in$

$xS\cup yS, a_2,\cdots,a_n\in A, u_1,v_1,\cdots,u_n,v_n\in S$,使得:

$$\begin{aligned} &x=x_1u_1, \\ &x_1v_1=x_2u_2, \qquad u_1a=v_1a_2,\\ &x_2v_2=x_3u_3, \qquad u_2a_2=v_2a_3,\\ &\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots\\ &x_nv_n=y, \qquad u_na_n=v_na'. \end{aligned}$$

令$z_1=x, z_i=x_{i-1}v_{i-1}, i=2,\cdots,n+1$.显然存在$k\in\{1,\cdots,n+1\}$,使得$z_k\in xS\cap yS$. 令$a''=a_k\in A$,则利用上述等式组计算可知$xa=ya'=z_1a=z_{n+1}a'=z_ka_k=z_ka''$.

(3)⇒(2)对于S的任意右理想I,J, 显然有$(I\cap J)A\subseteq IA\cap JA$. 设$xa=ya'\in IA\cap JA$,这里$x\in I, y\in J, a,a'\in A$, 由(3)知存在$z\in xS\cap yS, a''\in A$,使得$xa=ya'=za''$. 显然$z\in I\cap J$,所以$xa\in(I\cap J)A$.从而$(I\cap J)A=IA\cap JA$.

(2)⇒(3)显然.

(3)⇒(1)设$x,y\in S, a,a'\in A$, 满足$x\otimes a=y\otimes a'$(在$S\otimes A$中). 我们要证明在$(xS\cup yS)\otimes A$中有$x\otimes a=y\otimes a'$. 容易证明(利用定理4.1.2) $xa=ya'$. 由(3)即知存在$z\in xS\cap yS$, $a''\in A$使得$xa=ya'=za''$. 显然在$S\otimes A$中有$x\otimes a=z\otimes a'', y\otimes a'=z\otimes a''$, 所以在$xS\otimes A$中有$x\otimes a=z\otimes a''$, 在$yS\otimes A$中有$y\otimes a'=z\otimes a''$,从而在$(xS\cup yS)\otimes A$中有$x\otimes a=z\otimes a''=y\otimes a'$. 因此$A$是弱平坦的. □

当S是右PSF幺半群时,主弱平坦系有如下的等价刻画.

定理 4.5.3 设S是右PSF幺半群, A是S -系,则如下几条是等价的:

(1) A是主弱平坦的;

(2) 对任意$a,a'\in A, x\in S$,若$xa=xa'$,则存在$u\in S$,使得$x=xu, ua=ua'$.

证明 (1)⇒(2) 设$a,a'\in A, x\in S$满足$xa=xa'$. 则在$S\otimes A$中有$x\otimes a=x\otimes a'$. 因为A是主弱平坦的, 所以在$xS\otimes A$中有$x\otimes a=x\otimes a'$. 由命题4.2.13知存在$a_1,\cdots,a_n\in A, u_2,\cdots,u_n\in S$, $s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n\in S$,使得:

$$\begin{aligned} &\qquad\qquad a=s_1a_1,\\ &xs_1=xu_2t_1, \qquad t_1a_1=s_2a_2,\\ &xu_2s_2=xu_3t_2, \qquad t_2a_2=s_3a_3,\\ &\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots\\ &xu_ns_n=xt_n, \qquad t_na_n=a'. \end{aligned}$$

因为S是右PSF幺半群,所以由定理4.4.13知x是S的左半可消元. 因此由等式$xs_1 = xu_2t_1$知存在$v_1 \in S$, 使得$x = xv_1, v_1s_1 = v_1u_2t_1$.所以$xv_1u_2s_2 = xu_2s_2 = xu_3t_2 = xv_1u_3t_2$. 由$x$的左半可消性知存在$v_2 \in S$, 使得$x = xv_2, v_2v_1u_2s_2 = v_2v_1u_3t_2$. 令$v_1' = v_2v_1$, 则$x = xv_1', v_1's_1 = v_1'u_2t_1, v_1'u_2s_2 = v_1'u_3t_2$. 利用数学归纳法可以证明存在$v \in S$, 使得:

$$x = xv, \quad vs_1 = vu_2t_1, \quad vu_ns_n = vt_n,$$
$$vu_is_i = vu_{i+1}t_i, \quad i = 2, 3, \cdots, n-1.$$

因此, $va = vs_1a_1 = vu_2t_1a_1 = vu_2s_2a_2 = \cdots = vu_ns_na_n = vt_na_n = va'$.

(2)⇒(1)设$a, a' \in A, x \in S$满足$x \otimes a = x \otimes a'$(在$S \otimes A$中).容易证明$xa = xa'$. 所以由(2)知存在$u \in S$,使得$x = xu$, $ua = ua'$. 因此在$xS \otimes A$中有

$$x \otimes a = xu \otimes a = x \otimes ua = x \otimes ua' = xu \otimes a' = x \otimes a'.$$

即A是主弱平坦的. □

推论 4.5.4 设S是右PP幺半群, A是S -系.则如下几条是等价的:

(1) A是主弱平坦的;

(2) 对任意$a, a' \in A, x \in S$,若$xa = xa'$,则存在$u \in E(S)$,使得$x = xu, ua = ua'$.

证明 (2)⇒(1)显然.

(1)⇒(2)设$xa = xa'$. 由定理4.5.3知存在$v \in S$,使得$x = xv, va = va'$.由命题2.5.1知有幂等元$u \in S$, 使得$x = xu, u = uv$,所以$ua = uva = uva' = ua'$. □

当S是右PSF幺半群时,弱平坦系有如下的等价刻画.

定理 4.5.5 设S是右PSF幺半群, A是S -系. 则如下几条是等价的:

(1) A是弱平坦的;

(2) 对任意$a, a' \in A$,任意$x, y \in S$,若$xa = ya'$,则存在$a'' \in A, x_1, y_1, u, v \in S$,使得

$$xu = x, \quad yv = y, \quad xx_1 = yy_1,$$
$$ua = x_1a'', \quad va' = y_1a''.$$

证明 (1)⇒(2)设$x, y \in S, a, a' \in A$满足$xa = ya'$.由定理4.5.2知存在$a'' \in A, z = xs = yt \in xS \cap yS$, 使得$xa = ya' = za''$. 因为$xa = za'' = xsa''$,所以由定理4.5.3知存在$u \in S$,使得$x = xu, ua = usa''$. 同理由$ya' = yta''$知存在$v \in S$,使得$y = yv, va' = vta''$. 令$x_1 = us, y_1 = vt$,则$ua = x_1a'', va' = y_1a''$,且$xx_1 = xus = xs = yt = yvt = yy_1$.

(2)⇒(1)设$a, a' \in A, x, y \in S$, 在$S \otimes A$中有$x \otimes a = y \otimes a'$. 则$xa = ya'$. 由(2)知存在$a'' \in A, x_1, y_1, u, v \in S$, 使得$x = xu, y = yv, xx_1 = yy_1, ua = x_1a'', va' = y_1a''$. 所以在$(xS \cup yS) \otimes A$中有:

$$\begin{aligned} x \otimes a &= xu \otimes a = x \otimes ua = x \otimes x_1a'' = xx_1 \otimes a'' \\ &= yy_1 \otimes a'' = y \otimes y_1a'' = y \otimes va' = yv \otimes a' \\ &= y \otimes a'. \end{aligned}$$

因此A是弱平坦的. □

推论 4.5.6 设S是右PP幺半群,A是S -系,则如下两条是等价的:

(1) A是弱平坦的;

(2) 对于任意$a, a' \in A$,任意$x, y \in S$,若$xa = ya'$,则存在$a'' \in A, x_1, y_1 \in S, u, v \in E(S)$, 使得$x = xu, y = yv, xx_1 = yy_1, ua = x_1a'', va' = y_1a''$.

证明 由定理4.5.5知(2)⇒(1)是显然的.

(1)⇒(2)由定理4.5.5知存在$a'' \in A, x_1, y_1, u, v \in S$, 使得$x = xu, y = yv, xx_1 = yy_1, ua = x_1a'', va' = y_1a''$. 又因为$xS$和$yS$都是投射的, 所以存在幂等元$e, f$, 使得$x = xe, y = yf, e = eu, f = fv$.令$p = ex_1, q = fy_1$, 则有$ea = eua = ex_1a'' = pa'', fa' = fva' = fy_1a'' = qa'', xp = xex_1 = xx_1 = yy_1 = yfy_1 = yq$. □

当 S 是正则幺半群时, S - 系的弱平坦性的等价刻画较为简单. 为此我们先证明下面的重要定理. 该定理利用 S -系的主弱平坦性给出了正则幺半群的等价刻画.

定理 4.5.7 如下几条是等价的:

(1) S是正则幺半群;

(2) 所有S -系是主弱平坦的;

(3) 所有循环S -系是主弱平坦的.

证明 (1)⇒(2)因为正则幺半群是右PP的,所以我们利用推论4.5.4来证明本结论. 设A是任意S -系, $a, a' \in A, x \in S$, 满足$xa = xa'$.令$u = x'x$, 其中$x' \in V(x)$,则$u \in E(S), x = xx'x = xu, ua = x'xa = x'xa' = ua'$.

(2)⇒(3)显然.

(3)⇒(1)设$s \in S$,若$s = s^2$, 则s是正则元.下设$s \neq s^2$. 记λ为由(s, s^2)生成的S的最小左同余. 在张量积$S \otimes S/\lambda$中显然有$s \otimes 1\lambda = s^2 \otimes 1\lambda$. 利用循环$S$ -系S/λ的主弱平坦性可知在$sS \otimes S/\lambda$中有$s \otimes 1\lambda = s^2 \otimes 1\lambda$. 所以存

在$u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n \in S, b_2, \cdots, b_n \in S/\lambda, s_1, \cdots, s_n \in sS$,使得

$$
\begin{aligned}
&s = s_1u_1, \\
&s_1v_1 = s_2u_2, \qquad u_1 1\lambda = v_1b_2, \\
&\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots \\
&s_nv_n = s^2, \qquad u_nb_n = v_n1\lambda.
\end{aligned}
$$

设$b_i = w_i\lambda \in S/\lambda, i = 2, \cdots, n$.则$(u_1, v_1w_2) \in \lambda, \cdots, (u_nw_n, v_n) \in \lambda$. 若$u_1 = v_1w_2, \cdots, u_nw_n = v_n$, 则容易证明$s = s^2$, 矛盾. 设$u_1 = v_1w_2, \cdots, u_iw_i = v_iw_{i+1}$, 但$u_{i+1}w_{i+1} \neq v_{i+1}w_{i+2}$,则存在$t \in S$, 使得$u_{i+1}w_{i+1} = ts$. 所以$s = s_1u_1 = s_1v_1w_2 = \cdots = s_iv_iw_{i+1} = s_{i+1}u_{i+1}w_{i+1} = s_{i+1}ts \in sSs$, 说明 s 是正则元. □

定理 4.5.8 设S是正则幺半群, A是S -系.则A是弱平坦的当且仅当: 对于任意$x, y \in S$,任意$a \in A$,若$xa = ya$,则存在$z \in xS \cap yS$,使得$xa = ya = za$.

证明 必要性 设$xa = ya$. 则由定理4.5.2知存在$a' \in A, z_1 \in xS \cap yS$,使得$xa = ya = z_1a''$. 取$z_1' \in V(z_1)$,令$z = z_1z_1'x$, 则$z \in xS \cap yS$, 且$za = z_1z_1'xa = z_1z_1'z_1a'' = z_1a'' = xa = ya$.

充分性 设A满足所给条件,下证A是弱平坦的.由定理4.5.7知A 是主弱平坦的. 设$x, y \in S, a, a' \in A$满足$xa = ya'$.令$a'' = xa = ya'$, 取$x' \in V(x), y' \in V(y)$, 则有$a'' = xx'xa = xx'a'' = yy'a''$. 所以由条件知存在$z \in xx'S \cap yy'S = xS \cap yS$,使得$xx'a'' = yy'a'' = za''$. 所以$xa = ya' = za''$. 由定理4.5.2即知$A$是弱平坦的. □

当S是左可消幺半群时, S为右PSF幺半群,此时S -系的主弱平坦性和弱平坦性也有较为简单的刻画.先引入如下的概念.

定义 4.5.9 设A是S -系. 称A是挠自由的,如果对于任意$a, b \in A$, 任意左可消元$s \in S$,若$sa = sb$,则$a = b$.

一个基本的结果是

定理 4.5.10 主弱平坦系是挠自由的.

证明 设A是主弱平坦系, $a, b \in A, s \in S$且s是左可消元,满足$sa = sb$.容易证明在$S \otimes A$ 中有$s \otimes a = s \otimes b$. 所以在$sS \otimes A$中有$s \otimes a = s \otimes b$. 因此存

在$s_1, \cdots, s_n \in sS, a_2, \cdots, a_n \in A, u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n \in S$, 使得:

$$\begin{aligned} &s = s_1u_1, && \\ &s_1v_1 = s_2u_2, && u_1a = v_1a_2, \\ &\cdots\cdots && \cdots\cdots \\ &s_nv_n = s, && u_na_n = v_nb. \end{aligned}$$

设$s_i = st_i, t_i \in S, i = 1, \cdots, n$,则由$s$的左可消性得$t_1u_1 = 1, t_nv_n = 1, t_iv_i = t_{i+1}u_{i+1}, i = 1, \cdots, n$. 所以, $a = 1 \cdot a = t_1u_1a = t_1v_1a_2 = t_2u_2a_2 = \cdots = t_nu_na_n = t_nv_nb = 1 \cdot b = b$,即$A$是挠自由的. □

定理 4.5.11 设S是左可消幺半群, A是S-系. 则A是弱平坦的当且仅当A满足条件(P).

证明 若A满足条件(P), 则A是弱平坦的. 反过来, 假定A是弱平坦的. 设$x, y \in S, a, a' \in A$满足$xa = ya'$. 由定理4.5.5知存在$a'' \in A, x_1, y_1, u, v \in S$, 使得$xu = x, yv = y, xx_1 = yy_1, ua = x_1a'', va' = y_1a''$. 由$S$的左可消性知$u = 1, v = 1$. 所以$a = x_1a'', a' = y_1a'', xx_1 = yy_1$, 即$A$满足条件(P). □

定理4.5.7给出了所有 S-系都是主弱平坦系的幺半群的内部特征. 关于所有 S-系都是弱平坦系的幺半群和所有S-系都是挠自由系的幺半群,我们有如下的特征刻画.

定理 4.5.12 对于幺半群S,以下几条等价:

(1) 所有S-系是弱平坦的;

(2) 所有循环S-系是弱平坦的;

(3) S是正则幺半群,且对任意$x, y \in S$,存在$z \in xS \cap yS$,使得$(z, x) \in \lambda(x, y)$,这里$\lambda(x, y)$ 是S上的由(x, y)生成的最小左同余.

证明 (1)$\Rightarrow$(2)显然.

(2)$\Rightarrow$(3)由定理4.5.7知S是正则幺半群.对于任意$x, y \in S, S/\lambda(x, y)$是弱平坦系. 因为$x\lambda = y\lambda$,即$x \cdot 1\lambda = y \cdot 1\lambda$,所以由定理4.5.8知存在$z \in xS \cap yS$,使得$x \cdot 1\lambda = y \cdot 1\lambda = z \cdot 1\lambda$, 所以$(z, x) \in \lambda(x, y)$.

(3)$\Rightarrow$(1)设A是任意S-系,则由定理4.5.7知A是主弱平坦的. 设$a \in A, x, y \in S$满足$xa = ya$. 定义S上的左同余ρ如下:

$$s\rho t \Leftrightarrow sa = ta.$$

显然$(x, y) \in \rho$,所以$\lambda(x, y) \subseteq \rho$.由(3)知存在$z \in xS \cap yS$使得$(z, x) \in \lambda(x, y)$,所以$(z, x) \in \rho$,因此$xa = ya = za$.由定理4.5.8即知$A$是弱平坦的. □

定理 4.5.13 对于幺半群S,以下几条等价:

(1) 所有S -系都是挠自由的;

(2) 所有满足条件(E)的S -系是挠自由的;

(3) S的任意左可消元是左可逆元.

证明 (1)⇒(2)显然.

(2)⇒(3)设r是S的左可消元.若$Sr = S$,则r是左可逆元.设$Sr \neq S$.由§ 4.3知$A(Sr)$满足条件(E). 所以$A(Sr)$是挠自由的.但是,

$$r(1,x) = (r,z) = r(1,y),$$

而$(1,x) \neq (1,y)$.这和挠自由性矛盾. 所以任意左可消元是左可逆元.

(3)⇒(1)设A是S -系, $a,b \in A, r \in S$是左可消元, $ra = rb$. 因为r是左可逆元,所以存在$r' \in S$使得$r'r = 1$.因此$a = b$,即A是挠自由的. □

带B称为是右正则带,如果对任意$x,y \in B$,有$xyx = yx$.显然右正规带(满足$xyz = yxz$)是右正则带.下面的定理刻画了所有S -系都是弱平坦系的幂等元幺半群.

定理 4.5.14 设S是幂等元幺半群,则以下两条是等价的:

(1) 所有S -系都是弱平坦的;

(2) S是右正则带.

证明 (2)⇒(1) 设$x,y \in S$.令$z = xyx = yx \in xS \cap yS$,因为$x\lambda(x,y)y$,所以$z = xyx\lambda(x,y)xy\lambda(x,y)x$,即$(z,x) \in \lambda(x,y)$.由定理4.5.12即知所有$S$ -系是弱平坦的.

(1)⇒(2)设$S = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} S_\alpha$,其中$\Gamma$是半格,每个$S_\alpha$是矩形带.为证$S$是右正则带,只需证明每个$S_\alpha$是右零带即可.取定$\alpha \in \Gamma$,设$x,y \in S_\alpha$.由定理4.5.12知存在$z \in xS \cap yS$, 使得$(z,x) \in \lambda(x,y)$. 所以 $z = x$ 或者存在 $u_1, \cdots, u_n, x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n \in S$, 使得$\{x_i, y_i\} = \{x,y\}, i = 1, \cdots, n$,且

$$\begin{aligned} x &= u_1 x_1, \\ u_1 y_1 &= u_2 x_2, \\ u_2 y_2 &= u_3 x_3, \\ &\cdots\cdots \\ u_n y_n &= z. \end{aligned}$$

容易证明$z \in S_\alpha$.所以由矩形带的性质可知$xy = xyzy = xzy = yzy = yy = y$,即$S_\alpha$是右零带. □

利用拉回图，如下命题给出了挠自由、主弱平坦、弱平坦、平坦的刻画，其证明由定义是显然的.

命题 4.5.15　左 S -系 A 是挠自由的当且仅当右 S -系范畴中任意拉回图$P(S,S,l,l,S)$的映射φ是单射,其中$l:S\to S$是右S -系的单同态.

命题 4.5.16　左 S -系 A 是主弱平坦的当且仅当右 S -系范畴中任意拉回图$P(sS,sS,l,l,S)$的映射φ是单射,其中$l:sS\to sS$是右S -系的单同态, $s\in S$.

命题 4.5.17　左 S -系 A 是弱平坦的当且仅当右 S -系范畴中任意拉回图$P(I,I,l,l,S)$的映射φ是单射,其中I是S的右理想, $l:I\to S$是右S -系的单同态.

命题 4.5.18　左 S -系 A 是平坦的当且仅当右 S -系范畴中任意拉回图$P(M,M,l,l,Q)$的映射φ是单射,其中$l:M\to Q$是右S -系的单同态.

下面的定理揭示了条件(P)的推广和强平坦性的推广之间的某种联系.

定理 4.5.19　对于幺半群S,以下几条等价:

(1) 所有左S -系是弱拉回平坦的;

(2) 所有左S -系是弱kernel平坦的;

(3) 所有左S -系是主弱kernel平坦的;

(4) 所有左S -系是平移kernel平坦的;

(5) 所有左S -系满足条件(P);

(6) 所有左S -系满足条件(WP);

(7) 所有左S -系满足条件(PWP);

(8) S是群.

证明　(1)⇒(2)⇒(3)⇒(4)⇒(7)和(1)⇒(5)⇒(6)⇒(7)显然.

(8)⇒(1) 由定理4.2.9及条件(E′)的定义显然.

(7)⇒(8) 注意到若I是S的真左理想,则$A(I)$不满足条件(PWP),利用和定理4.2.9同样的证法可得.

已知弱平坦系是主弱平坦的,主弱平坦系是挠自由的.由定理4.5.12、4.5.13、4.5.7可知挠自由系可以不是主弱平坦的,主弱平坦系也可以不是弱平坦的.例如,取S为不是右正则带的幂等元幺半群,则由定理4.5.7知所有S -系是主弱平坦的,但由定理4.5.14知存在非弱平坦的S -系. 取N为左零半群且$|N|\geqslant 2$, T为非正则半群,令$S=N\dot{\cup}T\dot{\cup}\{1\}$, 规定$S$中的运算为:

$$nt=tn=t,\ \ \forall\, n\in N,\ \ \forall\, t\in T,$$

其他元素的运算按照以前的定义.则S是幺半群,显然S中的左可消元只有1,所以由定理4.5.13知所有S -系都是挠自由的, 但由定理4.5.7知存在非主弱平坦的S -系.

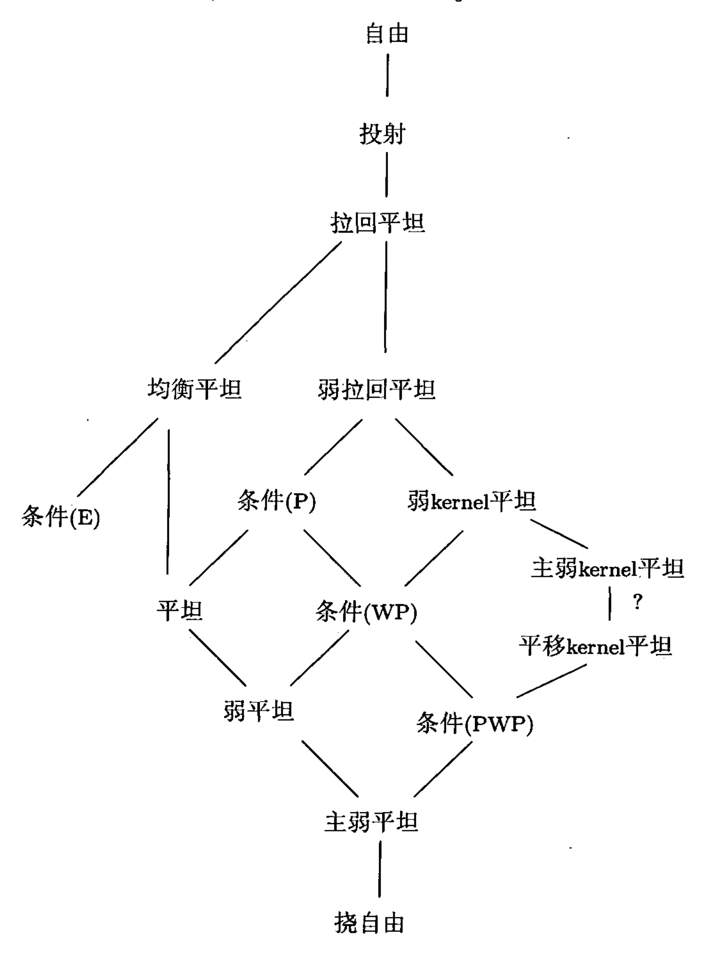
弱平坦系可以不是平坦的.例如,令S是右正规带,但S不具有常值结构映射.由定理4.5.14知所有S^1-系是弱平坦的,在§ 5.4中我们将要证明存在非平坦的S^1-系.

条件(P)未必推出弱拉回平坦. 例如，设$T=\langle x\rangle$是由一个元素x生成的自由幺半群,给T添加零元0得到幺半群S,即$\forall\ s\in S, s0=0s=00=0$. 显然此时

任意左S -系是拉回平坦的当且仅当它是弱拉回平坦的. 由命题5.1.3可知单循环左S -系$S/\lambda(1,x)$满足条件(P),但由命题5.1.4知$S/\lambda(1,x)$不是拉回平坦的,也不是弱拉回平坦的.

由定理4.2.12和定理4.5.19可知弱拉回平坦未必是拉回平坦的.主弱平坦不能推出条件(PWP)的例子由§5.10保证. 一元左S-系Θ满足条件(PWP),但显然Θ满足条件(WP)当且仅当S的任意两个右理想有非空的交,所以条件(PWP)不能推出条件(WP).

均衡平坦$\nRightarrow$拉回平坦的例子见例4.3.17; 由定理4.4.2可知例4.3.17也说明平坦$\nRightarrow$条件(P); 例4.3.18说明平坦$\nRightarrow$均衡平坦;例4.3.8说明条件(E)$\nRightarrow$平坦, 从而条件(E)$\nRightarrow$均衡平坦;平坦性$\nRightarrow$条件(E)的理由是: 否则,条件(P)$\Longrightarrow$条件(E),从而条件(P)$\Rightarrow$拉回平坦.矛盾. 挠自由$\nRightarrow$主弱平坦$\nRightarrow$弱平坦$\nRightarrow$平坦的例子见本节; 投射$\nRightarrow$自由的例子见第2章;强平坦$\nRightarrow$ 投射性由§5.9保证.



本章引入的平坦性概念及第2章的投射性概念之间的关系可用上页图示之.

关于上页图中各种性质之间强弱关系的反例,本书只列出了一部分, 有些反例至今仍然遗留着,比如平移kernel平坦是否一定不能推出主弱kernel平坦,弱kernel平坦性和平坦性的关系等.

§4.6 方程组的可解性与R-纯同态

在§3.3中,我们研究了只有一个未定元的方程组,下面我们考虑方程个数有限的方程组. 设A, B是右S-系,且$A \leqslant B$.

根据Normak[195]和Gould[96]的文章,我们称A在B中是NG-纯的,如果对于A上的任意方程个数有限的方程组Σ,若Σ在B中有解,则Σ在A中一定有解.称A是绝对NG-纯的,如果A在任意扩张系中是NG-纯的.显然A是绝对NG-纯的当且仅当A上的任意方程个数有限的容许方程组在A中有解. Gould[96,97,102,103] 文章中对NG-纯性和绝对NG-纯右S-系作了大量的研究.

设A, B是右S-系, $f : A \to B$是S-单同态.根据Renshaw [210~212]的文章,我们称f是R-纯的,如果对所有的左S-系X, 映射$f \otimes 1 : A \otimes X \to B \otimes X, a \otimes x \mapsto f(a) \otimes x$总是单的.

设R是环,在R-模范畴中, NG-纯性和R-纯性对应的概念是一致的,即单同态$f : A \to B$是R-纯的当且仅当$f(A)$在B中是NG-纯的. 本节考虑在右S-系范畴Act-S中, NG-纯性和R-纯性的关系,我们的结果表明在Act-S中, NG-纯性严格强于R-纯性.本节的结果选自文献[179].

设S是幺半群T的子幺半群. 称S在T中具有左扩张性质,如果对所有左S-系A, 映射$A \to T \underset{S}{\otimes} A : a \mapsto 1 \otimes a$是单的. 称$S$具有左绝对扩张性质,如果$S$在所有包含$S$为子幺半群的幺半群中具有左扩张性质. 例如,当所有左S-系都是平坦系时, S具有左绝对扩张性质, 此时任意S-单同态都是R-纯的.

定理 4.6.1 设A, B是右S-系, $f : A \to B$是S-单同态.若$f(A)$在B中NG-纯,则f是R-纯的.

证明 设M是S-系, $m, m' \in M, a, a' \in A$, 在$B \otimes M$中有$f(a) \otimes m = f(a') \otimes m'$.所以存在$s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S, m_2, \cdots, m_n \in M, a_1, \cdots, a_n \in B$,使

得:

$$\begin{aligned}
&f(a) = a_1 s_1, \\
&a_1 t_1 = a_2 s_2, \qquad s_1 m = t_1 m_2, \\
&a_2 t_2 = a_3 s_3, \qquad s_2 m_2 = t_2 m_3, \\
&\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots \\
&a_n t_n = f(a'), \qquad s_n m_n = t_n m'.
\end{aligned} \tag{4.6.1}$$

考虑$f(A)$上的方程组

$\Sigma = \{x_1 s_1 = f(a), x_n t_n = f(a')\} \cup \{x_i t_i = x_{i+1} s_{i+1} | i = 1, \cdots, n-1\}$,

由式(4.6.1)可知Σ在B中有解$a_1, \cdots, a_n$. 所以由条件知Σ在$f(A)$中有解,即存在$c_1, \cdots, c_n \in A$,使得:

$$\begin{aligned}
&f(c_1)s_1 = f(a), \quad f(c_n)t_n = f(a'), \\
&f(c_i)t_i = f(c_{i+1})s_{i+1}, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1.
\end{aligned}$$

由f的单性可知有:

$$c_1 s_1 = a, \quad c_n t_n = a', \quad c_i t_i = c_{i+1} s_{i+1}, \quad i = 1, \cdots, n-1.$$

所以由式(4.6.1)可知在$A \otimes M$中有$a \otimes m = c_1 s_1 \otimes m = c_1 \otimes s_1 m = c_1 \otimes t_1 m_2 = c_1 t_1 \otimes m_2 = c_2 s_2 \otimes m_2 = \cdots = c_n s_n \otimes m_n = c_n \otimes s_n m_n = c_n \otimes t_n m' = c_n t_n \otimes m' = a' \otimes m'$. 因此映射$A \otimes M \to B \otimes M$是单的.故$f : A \to B$是$R$-纯的. □

设S是幺半群T的子幺半群, 且S的幺元即为T的幺元. 则T可看成是右S-系.若存在右S-同态$\varphi : T \to T$使得:

(1) $\varphi^2 = \varphi, \varphi(1) = 1$;

(2) 对于任意$s \in S$,任意$t \in T$,若$ts \in S$,则$\varphi(t) \in S$. 则称S在T中是右拟一致的.

显然,文献[211]中的几乎一致是右拟一致的.

定理 4.6.2 设幺半群S在幺半群T中是右拟一致的,则S在T中具有左扩张性质.

证明 设A是任意左S-系.我们要证明$S \otimes A \to T \otimes A$是单的. 设$a, a' \in A, s, s' \in S$, 使得在$T \otimes A$中有$s \otimes a = s' \otimes a'$.则存在$u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n \in$

$S, a_2, \cdots, a_n \in A, t_1, \cdots, t_n \in T$,使得:

$$\begin{aligned} & s = t_1u_1, \\ & t_1v_1 = t_2u_2, \qquad u_1a = v_1a_2, \\ & \cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots \\ & t_nv_n = s', \qquad u_na_n = v_na'. \end{aligned}$$

因为S在T中是右拟一致的,故存在S -同态$\varphi : T \to T$,满足条件(1)、(2). 易知对任意$s \in S$都有$\varphi(s) = s$.因为$t_1u_1 = s \in S$,所以由条件(2)知$\varphi(t_1) \in S$.再由$t_1v_1 = t_2u_2$知$\varphi(t_2)u_2 = \varphi(t_2u_2) = \varphi(t_1v_1) = \varphi(t_1)v_1 \in S$,故由条件(2)知$\varphi(t_2) = \varphi(\varphi(t_2)) \in S$. 同理可以证明$\varphi(t_3) \in S, \cdots, \varphi(t_n) \in S$.所以在$S \otimes A$中有:

$$\begin{aligned} s \otimes a &= \varphi(s) \otimes a = \varphi(t_1u_1) \otimes a = \varphi(t_1)u_1 \otimes a \\ &= \varphi(t_1) \otimes u_1a = \varphi(t_1) \otimes v_1a_2 = \varphi(t_1)v_1 \otimes a_2 \\ &= \varphi(t_1v_1) \otimes a_2 = \varphi(t_2u_2) \otimes a_2 = \cdots \\ &= \varphi(t_nu_n) \otimes a_n = \varphi(t_n)u_n \otimes a_n = \varphi(t_n) \otimes u_na_n \\ &= \varphi(t_n) \otimes v_na' = \varphi(t_n)v_n \otimes a' = \varphi(t_nv_n) \otimes a' \\ &= \varphi(s') \otimes a' = s' \otimes a'. \end{aligned}$$

利用同构$A \simeq S \otimes A$即知S在T中具有左扩张性. □

现在可以给出例子说明定理4.6.1的逆不成立.

例 4.6.3 设S是群且$|S| \geqslant 2$, R是任意半群.令$T = S \dot{\cup} R$, 规定T的乘法为: $sr = rs = r, \forall\, r \in R, \forall\, s \in S$; S中的元素或R中的元素相乘时按原来的定义.则T是幺半群,且T的幺元即为S的幺元.令$\varphi : T \to T$是恒等自同态,则条件(1)显然成立.对任意$s \in S$,任意$t \in T$,若$t \in S$,则$\varphi(t) = t \in S$.若$t \in R$,则$ts = t \notin S$. 所以条件(2)也成立.所以S是T的右拟一致子幺半群.由命题4.6.2知S在T中具有左扩张性质,所以作为右S -系,包含同态$S \to T$是R-纯的.但S在T中不是NG-纯的.事实上,考虑方程

$$xs = xs', \quad s, s' \in S,$$

这里$s \neq s'$. 此方程在T中有解(取$r \in R$,则$rs = r = rs'$),但它在S中没有解.

下面再给出一个例子.

例 4.6.4 设S是有限右群且$|S| \geqslant 2$,易知S'是左绝对平坦幺半群.设$f : A \to B$是任意右S' -单同态,则对任意左S' -系M, 映射$f \otimes 1 : A \otimes M \to B \otimes M$总

是单的.所以任意S'-单同态都是R-纯的. 如果对于S', 定理4.6.1的逆成立,那么对于任意右S'-系B,若$S'_{S'}\leqslant B$,则$S'_{S'}$在B中是NG-纯的.因此$S'_{S'}$是绝对NG-纯的.由引理3.3.9知存在$y\in S'$,使得对任意$x\in S'$,有$y=yx$.显然这与S'的取法矛盾. 所以定理4.6.1的逆不成立.

命题 4.6.5 幺半群S是绝对NG-纯的当且仅当S在任意扩张幺半群中是NG-纯的.

证明 显然只需证明充分性. 设右S-系A以S_S为子系, Σ是S_S上的有限方程组, 它在A中有解.令$T=A\dot{\cup}S$,规定乘法为: $a_1a_2=a_2, sa=a, a,a_1,a_2\in A, s\in S$; S中的元相乘以及S中的元右乘A中的元皆按原来的定义.易知T是幺半群.显然Σ在A中的解即为Σ在T中的解.所以由条件可知Σ在S_S中有解.因此S_S是绝对NG-纯的. □

设A,B,C为左S-系, $f:A\to B, g:B\to C$为S-同态. 称$A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$是关系正合序列, 如果$\rho_f=(\mathrm{Im}f\times\mathrm{Im}f)\bigcup 1_B=\mathrm{Ker}g$.若$A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$和$B\xrightarrow{g}C\xrightarrow{h}D$都是关系正合序列,则称$A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\xrightarrow{h}D$也是关系正合序列.对集合及映射也可类似地定义关系正合序列,以下总是以Z表示只有一个元素的左S-系.

引理 4.6.6 (1) $Z\xrightarrow{g}A\xrightarrow{f}B$是关系正合序列$\Leftrightarrow$ f是单同态.

(2)$A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}Z$是关系正合序列$\Leftrightarrow f$是满同态.

证明 机械的验证. □

引理 4.6.7 设 $A\xrightarrow{\varphi}B\xrightarrow{\psi}C\longrightarrow Z$ 是关系正合序列, M 是不可分右S-系, 则$M\otimes A\to M\otimes B\to M\otimes C\to M\otimes Z$也是关系正合序列.

证明 因为 M 是不可分的, 所以对任意 $m,m'\in M$, 若 $m\neq m'$, 则存在$s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n\in S, m_1,\cdots,m_n\in M$, 使得

$$m=m_1s_1, m_1t_1=m_2s_2,\cdots,m_nt_n=m'. \tag{4.6.2}$$

先证$M\otimes Z$是单元集合. 设$Z=\{z\}, m\otimes z, m'\otimes z\in M\otimes Z$. 由式(4.6.2)可知在$M\otimes Z$中有:

$$\begin{aligned}m\otimes z&=m_1s_1\otimes z=m_1\otimes s_1z=m_1\otimes z=m_1\otimes t_1z\\&=m_1t_1\otimes z=m_2s_2\otimes z=\cdots=m_ns_n\otimes z=m_n\otimes s_nz\\&=m_n\otimes z=m_n\otimes t_nz=m_nt_n\otimes z=m'\otimes z.\end{aligned}$$

现在即可证明$M\otimes B\xrightarrow{1\otimes\psi}M\otimes C\to M\otimes Z$是关系正合列. 事实上,因为$\psi$是满同态,所以对任意$m\otimes c\in M\otimes C$,存在$b\in B$,使得$\psi(b)=c$. 所以$m\otimes c=m\otimes\psi(b)=(1\otimes\psi)(m\otimes b)$.即$1\otimes\psi$是满的.由引理4.6.6即知结论成立.

下证$M \otimes A \xrightarrow{1\otimes\psi} M \otimes B \xrightarrow{1\otimes\psi} M \otimes C$也是关系正合序列. 设$b, b' \in B, m, m' \in M$,使得在$M\otimes C$中有$m\otimes\psi(b) = m'\otimes\psi(b')$.则存在$s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S, c_2, \cdots, c_n \in C, m_1, \cdots, m_n \in M$,使得:

$$\begin{aligned}
&m = m_1 s_1, \\
&m_1 t_1 = m_2 s_2, \qquad s_1\psi(b) = t_1 c_2, \\
&\quad\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots \\
&m_n t_n = m', \qquad s_n c_n = t_n \psi(b').
\end{aligned}$$

因为ψ是满同态,所以存在$b_2, \cdots, b_n \in B$,使得:

$$\psi(b_i) = c_i, \quad i = 2, \cdots, n.$$

因此有

$$(s_1 b, t_1 b_2), (s_2 b_2, t_2 b_3), \cdots, (s_n b_n, t_n b') \in \mathrm{Ker}\psi.$$

而$A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to Z$是关系正合序列,所以$\mathrm{Ker}\psi = \rho_\varphi = (\mathrm{Im}\varphi \times \mathrm{Im}\varphi) \bigcup 1_B$,所以有下述三种情形:

(i) $s_1 b \neq t_1 b_2$.此时必有$a \in A$,使得$\varphi(a) = s_1 b$. 所以$m \otimes b = m_1 s_1 \otimes b = m_1 \otimes s_1 b = m_1 \otimes \varphi(a) = (1 \otimes \varphi)(m_1 \otimes a)$. 因此有$m \otimes b \in \mathrm{Im}(1 \otimes \varphi)$.

(ii) 存在$k \in \{1, \cdots, n-1\}$,使得$s_1 b = t_1 b_2, \cdots, s_k b_k = t_k b_{k+1}$, 但$s_{k+1} b_{k+1} \neq t_{k+1} b_{k+2}$. 此时存在$a \in A$,使得$\varphi(a) = s_{k+1} b_{k+1}$.所以在$M \otimes B$中有:

$$\begin{aligned}
m \otimes b &= m_1 s_1 \otimes b = m_1 \otimes s_1 b = m_1 \otimes t_1 b_2 = m_1 t_1 \otimes b_2 \\
&= m_2 s_2 \otimes b_2 = \cdots = m_k s_k \otimes b_k = m_k \otimes s_k b_k \\
&= m_k \otimes t_k b_{k+1} = m_k t_k \otimes b_{k+1} = m_{k+1} s_{k+1} \otimes b_{k+1} \\
&= m_{k+1} \otimes s_{k+1} b_{k+1} = m_{k+1} \otimes \varphi(a) \\
&= (1 \otimes \varphi)(m_{k+1} \otimes a).
\end{aligned}$$

所以$m \otimes b \in \mathrm{Im}(1 \otimes \varphi)$.

(iii) $s_1 b = t_1 b_2, s_2 b_2 = t_2 b_3, \cdots, s_n b_n = t_n b'$. 此时在$M \otimes B$中有

$$\begin{aligned}
m \otimes b &= m_1 s_1 \otimes b = m_1 \otimes s_1 b = m_1 \otimes t_1 b_2 \\
&= \cdots = m_n \otimes t_n b' = m_n t_n \otimes b' = m' \otimes b'.
\end{aligned}$$

同理可以证明$m' \otimes b' \in \mathrm{Im}(1 \otimes \varphi)$或者$m' \otimes b' = m \otimes b$.

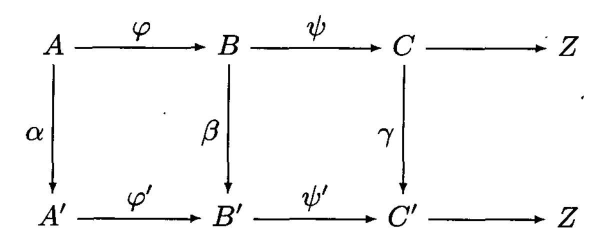
所以$(m\otimes b, m'\otimes b') \in (\mathrm{Im}(1\otimes\varphi) \times \mathrm{Im}(1\otimes\varphi)) \bigcup 1_{M\otimes B}$.这就证明了$\mathrm{Ker}(1\otimes\psi) \subseteq \rho_{1\otimes\varphi}$.下证相反的包含关系.

设$m, m' \in M, a, a' \in A$. 我们要证明在$M \otimes C$中有$m \otimes \psi\varphi(a) = m' \otimes \psi\varphi(a')$. 因为$M$是连通的, 故由式(4.6.2)可知在$M \otimes C$中有:

$$\begin{aligned} m \otimes \psi\varphi(a) &= m_1 s_1 \otimes \psi\varphi(a) = m_1 \otimes s_1\psi\varphi(a) \\ &= m_1 \otimes \psi\varphi(s_1 a) = m_1 \otimes \psi\varphi(t_1 a) \\ &= m_1 \otimes t_1\psi\varphi(a) = m_1 t_1 \otimes \psi\varphi(a) \\ &= m_2 s_2 \otimes \psi\varphi(a) = \cdots = m_n t_n \otimes \psi\varphi(a) \\ &= m' \otimes \psi\varphi(a) = m' \otimes \psi\varphi(a'). \end{aligned}$$

此即完成了证明. □

引理 4.6.8 设下图中上、下两行都是关系正合序列, 且每个方块都可交换,



并设β是单同态, 则γ是单同态当且仅当$\rho_\beta \cap \rho_{\varphi'} = \rho_{\beta\varphi}$. 这里$\rho_\beta = (\mathrm{Im}\beta \times \mathrm{Im}\beta) \cup 1'_B$,其他同理.

证明 机械的图追踪. □

命题 4.6.9 设A是循环右S-系B的循环子系,且包含同态$A \to B$是R-纯的.则A上的如下形式的方程组

$$\Sigma = \{xs_j = a_j \mid a_j \in A, j = 1, \cdots, n\}$$

若在B中有解,则在A中一定有解.

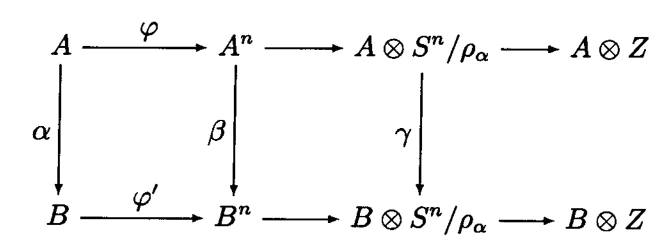
证明 设Σ在B中有解b. 作S-同态$\alpha : S \to S^n$为$\alpha(s) = (ss_1, ss_2, \cdots, ss_n)$. 则有关系正合序列:

$$S \xrightarrow{\alpha} S^n \longrightarrow S^n/\rho_\alpha \longrightarrow Z.$$

因为A, B都是连通的右S-系,所以由引理4.6.7知有如下的关系正合交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} A \otimes S & \longrightarrow & A \otimes S^n & \longrightarrow & A \otimes S^n/\rho_\alpha & \longrightarrow & A \otimes Z \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ B \otimes S & \longrightarrow & B \otimes S^n & \longrightarrow & B \otimes S^n/\rho_\alpha & \longrightarrow & B \otimes Z \end{array}$$

利用同构$A \otimes S \simeq A$可知有$A \otimes S^n \simeq A^n, B \otimes S^n \simeq B^n$. 故有如下的关系正合交换图:



因为包含同态$A \to B$是R-纯的,所以β, γ均为单同态, 所以由引理4.6.8知有$\rho_\beta \cap \rho_{\varphi'} = \rho_{\beta\varphi}$.

因为$\varphi'(b) = (bs_1, \cdots, bs_n) = (a_1, \cdots, a_n) = \beta(a_1, \cdots, a_n)$,所以存在$a \in A$,使得$\beta\varphi(a) = (a_1, \cdots, a_n)$. 而$\beta\varphi(a) = \varphi'\alpha'(a) = \varphi'(a) = (as_1, \cdots, as_n)$,所以$as_j = a_j, j = 1, \cdots, n$.这说明$\Sigma$在$A$中有解. □

第5章　平坦性对幺半群的刻画

§5.1　条件(P)和强平坦性一致的幺半群

由第4章的讨论可知,强平坦性⇒条件(P)⇒平坦性,并且每个递推关系都是不可逆的. 然而这并不排除在某些特殊的幺半群上,某两个概念是一致的.如何刻画这些幺半群(在其上两个不同的概念是一致的),便是半群同调分类理论的主要内容.本章考虑的问题主要是这类问题. 本节和下节分别讨论条件(P)和强平坦性一致的幺半群,以及平坦性和条件(P)一致的幺半群.本节的内容选自于文献[21]、[202]、[203].

命题 5.1.1　设λ是S上的左同余.则S/λ满足条件(P)当且仅当:对任意$s,t\in S$, 如果$s\lambda t$,那么存在$u,v\in S$,使得$su=tv$,并且$u\lambda 1\lambda v$.

证明　充分性　设$s,s'\in S, a,a'\in S/\lambda$, 满足$sa=s'a'$.可设$a=x\lambda, a'=x'\lambda$, 则$sx\lambda=s'x'\lambda$. 所以由条件知存在$u,v\in S$,使得$sxu=s'x'v$. 并且$u\lambda 1\lambda v$.因此, $a=x\lambda=xu\lambda=xu(1\lambda), a'=x'\lambda=x'v\lambda=x'v(1\lambda)$,即$S/\lambda$满足条件(P).

充分性　设$s\lambda t$,则$s\lambda=t\lambda$,因此存在$u,v\in S, a''=x\lambda\in S/\lambda$, 使得$su=tv, 1\lambda=ua''=ux\lambda=va''=vx\lambda$. 所以有$sux=tvx$,并且$ux\lambda 1\lambda vx$. □

命题 5.1.2　设λ是S上的左同余,则S/λ是强平坦系当且仅当:对任意$s,t\in S$,如果$s\lambda t$,那么存在$u\in S$,使得$su=tu$,并且$u\lambda 1$.

证明　由命题4.3.15和定理4.4.7即得. □

命题 5.1.3　记$\lambda(1,x)$为S的由$(1,x)$生成的最小左同余,则$S/\lambda(1,x)$满足条件(P).

证明　设$s,t\in S, s\lambda(1,x)t$, 则由命题1.1.3知$s=t$,或者存在$t_1,\cdots,t_n\in S$,使得:

$$s=t_1c_1, t_1d_1=t_2c_2,\cdots,t_nd_n=t,$$

其中 (c_i,d_i) 或 $(d_i,c_i)\in\{(1,x)\}$, $i=1,2,\cdots,n$.　容易证明(如用数学归纳法)此时存在自然数m,k,使得$sx^m=tx^k$.又显然有$x^m=x^{m-1}x\lambda x^{m-1}=\cdots=\lambda 1\lambda x\lambda\cdots\lambda x^k$, 所以$S/\lambda(1,x)$满足条件(P). □

命题 5.1.4　$S/\lambda(1,x)$是强平坦的当且仅当存在自然数n,使得$x^{n+1}=x^n$.

证明 因为$x\lambda(1,x)1$,所以由命题5.1.2知存在$u\in S$,使得$xu=u$,并且$u\lambda(1,x)1$.由命题5.1.3的证明即知存在自然数m,n使得$ux^m=x^n$.所以

$$x^{n+1}=xx^n=xux^m=ux^m=x^n.$$

反之,设$x^{n+1}=x^n$. 对于任意$s,t\in S$,若$s\lambda(1,x)t$, 则和命题5.1.3的证明类似地可知存在自然数m,k,使得$sx^m=tx^k$. 取自然数r使之大于n,m,k, 则有$sx^r=tx^r$, 并且$x^r\lambda(1,x)1$.由命题5.1.2即知$S/\lambda(1,x)$是强平坦的. □

下面是本节的主要定理.

定理 5.1.5 如下几条是等价的:

(1) 每个满足条件(P)的有限生成S -系是强平坦的;

(2) 每个满足条件(P)的循环S -系是强平坦的;

(3) 任意$x\in S$, $S/\lambda(1,x)$是强平坦的;

(4) 任意$x\in S$,存在自然数n,使得$x^{n+1}=x^n$.

证明 (1)⇒(2)⇒(3)是显然的.由命题5.1.4可得(3)⇒(4).

(4)⇒(2)设S/λ满足条件(P), $s,t\in S$满足$s\lambda t$. 由命题5.1.1知存在$u,v\in S$,使得$su=tv$, 并且$u\lambda1\lambda v$.由$u\lambda v$可知存在$p,q\in S$,使得$up=vq$并且$p\lambda1\lambda q$.由(4)知存在m,n,使得$u^{m+1}=u^m,v^{n+1}=v^n$. 记$e=u^m,f=v^n$,则$e,f\in E(S)$,并且$ue=e,vf=f,e\lambda1\lambda f$.再由命题5.1.1知存在$w,z\in S$,使得$ew=fz$,并且$w\lambda1\lambda z$, 记$h=ew$.则$h=ew\lambda e\lambda1$,并且$sh=sew=suew=tvew=tvfz=tfz=th$. 所以$S/\lambda$是强平坦的.

(2)⇒(1)设A是有限生成S -系并且满足条件(P),则A是循环子系的不交并.由此即知这些循环子系都满足条件(P),从而由条件知都是强平坦的.因此A是强平坦的. □

定理5.1.5中的条件(4)能否保证所有满足条件(P)的S -系都是强平坦的,或者如何刻画所有满足条件(P)的S -系都是强平坦系的幺半群,这些问题至今仍是未解决的公开问题.

下面考虑几类特殊幺半群,在其上所有满足条件(P)的S -系都是强平坦的.由条件(P)以及强平坦的定义，要证明每一个满足条件(P)的左S -系是强平坦的，只需证明它也满足条件(E)即可.

引理 5.1.6 设S是幺半群, A是满足条件(P)的左S-系，对任意的$u_1, v_1 \in S, a_1 \in A$, 若$u_1a_1 = v_1a_1$, 则存在$u_i, v_i \in S, a_i \in A, i = 2, 3, \cdots$, 使得

$$\begin{aligned} &u_1u_2 = v_1v_2, \\ &u_2u_3 = v_2v_3, \\ &\cdots\cdots \\ &u_{n-1}u_n = v_{n-1}v_n, \\ &\cdots\cdots \end{aligned} \qquad (5.1.1) \qquad \begin{aligned} &a_1 = u_2a_2 = v_2a_2, \\ &a_2 = u_3a_3 = v_3a_3, \\ &\cdots\cdots \\ &a_{n-1} = u_na_n = v_na_n, \\ &\cdots\cdots \end{aligned} \qquad (5.1.2)$$

证明 由条件(P)的定义显然. □

在本节以下结论的证明中，总是用U表示等式组(5.1.1)中元素u_i构成的无穷序列 $(u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots)$, 用$V$表示等式组(5.1.2)中元素 v_i 构成的无穷序列 $(v_2, v_3, \cdots, v_n, \cdots)$.

定理 5.1.7 设S是幺半群, 如果 S 满足下述条件: 对 S 中任意无穷序列$(s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots), s_i \in S\backslash\{1\}$, 存在自然数$n$,使得对任意的自然数$k \geqslant n$,都有$s_1s_2\cdots s_{k-1}s_k = s_1s_2\cdots s_{n-1}s_n$. 则每一个满足条件(P)的左$S$-系是强平坦的.

证明 设A是满足条件(P)的左S-系,对任意的$u_1, v_1 \in S, a_1 \in A$, 若$u_1a_1 = v_1a_1$, 则存在$u_i, v_i \in S, a_i \in A, i = 2, 3, \cdots$, 使得引理5.1.6中的等式组成立. 对$U$和$V$,由$S$的定义,存在$n_1, n_2 \in N$,使得对任意自然数$k_1 \geqslant n_1, k_2 \geqslant n_2$,下式成立:

$$u_2u_3\cdots u_{n_1} = u_2u_3\cdots u_{n_1}u_{n_1+1}\cdots u_{k_1}, \tag{5.1.3}$$

$$v_2v_3\cdots v_{n_2} = v_2v_3\cdots v_{n_2}v_{n_2+1}\cdots v_{k_2}. \tag{5.1.4}$$

令$n = \max\{n_1, n_2\}$,则有以下两种情形:

情形(1) n为奇数，由式(5.1.3),式(5.1.4)，则总能取到偶数$k > n$, 使得下式成立:

$$u_2u_3\cdots u_n = u_2u_3\cdots u_nu_{n+1}\cdots u_k, \tag{5.1.5}$$

$$v_2v_3\cdots v_n = v_2v_3\cdots v_nv_{n+1}\cdots v_k. \tag{5.1.6}$$

此时由式(5.1.1)知$u_2\cdots u_n = v_2\cdots v_n$, 而由式(5.1.5)和式(5.1.6)，有

$$\begin{aligned} u_1(u_2\cdots u_n) &= u_1(u_2\cdots u_nu_{n+1}\cdots u_k) \\ &= v_1(v_2\cdots v_nv_{n+1}\cdots v_k) = v_1(v_2\cdots v_n). \end{aligned}$$

情形(2) n为偶数，由式(5.1.3)和式(5.1.4)，则总能取到奇数$k > n$, 使得下式成立:

$$u_2u_3\cdots u_n = u_2u_3\cdots u_nu_{n+1}\cdots u_k, \tag{5.1.7}$$

$$v_2v_3\cdots v_n = v_2v_3\cdots v_nv_{n+1}\cdots v_k. \tag{5.1.8}$$

此时由式(5.1.1)显然$u_1(u_2\cdots u_n) = v_1(v_2\cdots v_n)$, 而由式(5.1.7)和式(5.1.8), 有

$$\begin{aligned}u_2\cdots u_n &= u_2\cdots u_nu_{n+1}\cdots u_k\\ &= v_2\cdots v_nv_{n+1}\cdots v_k = v_2\cdots v_n.\end{aligned}$$

总之，令$r = u_2\cdots u_n = v_2\cdots v_n$, 由上述讨论以及式(5.1.2), 总有$a_1 = ra_n, u_1r = v_1r$. 即$A$满足条件(E). □

定理 5.1.8　设S是幺半群，如果S满足下述条件: 存在$k \in N$, 使得对S中任意无穷序列 $(s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots)$, $s_i \in S\backslash\{1\}$, 都有自然数 $n > k$, 使得 $s_1s_2\cdots s_{k-1}s_ks_{k+1}\cdots s_n = s_1s_2\cdots s_{k-1}s_k^2s_{k+1}\cdots s_n$. 则每一个满足条件(P)的左$S$ -系是强平坦的.

证明　设A是满足条件(P)的左S -系，对任意的$u_1, v_1 \in S, a_1 \in A$, 若$u_1a_1 = v_1a_1$, 则存在$u_i, v_i \in S, a_i \in A, i = 2, 3, \cdots$, 使得引理5.1.6中的等式组成立. 对$U$和$V$, 由$S$的定义, 存在$n_1, n_2 \in N(n_1 > k,\ n_2 > k)$, 使得下式成立:

$$u_2\cdots u_{k-1}u_ku_{k+1}\cdots u_{n_1} = u_2\cdots u_{k-1}u_k^2u_{k+1}\cdots u_{n_1}, \tag{5.1.9}$$

$$v_2\cdots v_{k-1}v_kv_{k+1}\cdots v_{n_2} = v_2\cdots v_{k-1}v_k^2v_{k+1}\cdots v_{n_2}. \tag{5.1.10}$$

则有以下两种情形:

情形(1) k为奇数，由式(5.1.9)和式(5.1.10), 则总能取到偶数$l > k$, 使得下式成立:

$$u_2\cdots u_{k-1}u_ku_{k+1}\cdots u_l = u_2\cdots u_{k-1}u_k^2u_{k+1}\cdots u_l, \tag{5.1.11}$$

$$v_2\cdots v_{k-1}v_kv_{k+1}\cdots v_l = v_2\cdots v_{k-1}v_k^2v_{k+1}\cdots v_l. \tag{5.1.12}$$

此时由式(5.1.1)显然

$$\begin{aligned}&u_1u_2\cdots u_{k-1}u_ku_{k+1}\cdots u_l\\ =&v_1v_2\cdots v_{k-1}v_kv_{k+1}\cdots v_l,\end{aligned}$$

而由式(5.1.1), 式(5.1.11)和式(5.1.12), 有

$$u_2\cdots u_{k-1}u_ku_{k+1}\cdots u_l=u_2\cdots u_{k-1}u_k^2u_{k+1}\cdots u_l$$
$$=v_2\cdots v_{k-1}v_k^2v_{k+1}\cdots v_l=v_2\cdots v_{k-1}v_kv_{k+1}\cdots v_l.$$

情形(2) k为偶数，由式(5.1.9)和式(5.1.10),则总能取到奇数$l>k$, 使得下式成立:

$$u_2\cdots u_{k-1}u_ku_{k+1}\cdots u_l=u_2\cdots u_{k-1}u_k^2u_{k+1}\cdots u_l, \tag{5.1.13}$$

$$v_2\cdots v_{k-1}v_kv_{k+1}\cdots v_l=v_2\cdots v_{k-1}v_k^2v_{k+1}\cdots v_l. \tag{5.1.14}$$

此时由式(5.1.1)显然

$$u_2u_3\cdots u_{k-1}u_ku_{k+1}\cdots u_l$$
$$=v_2v_3\cdots v_{k-1}v_kv_{k+1}\cdots v_l,$$

而由式(5.1.1),式(5.1.13)和式(5.1.14),有

$$u_1(u_2u_3\cdots u_{k-1}u_ku_{k+1}\cdots u_l)=u_1u_2u_3\cdots u_{k-1}u_k^2u_{k+1}\cdots u_l$$
$$=v_1v_2v_3\cdots v_{k-1}v_k^2v_{k+1}\cdots v_l=v_1(v_2v_3\cdots v_{k-1}v_kv_{k+1}\cdots v_l).$$

总之,令$r=u_2\cdots u_l=v_2\cdots v_l$, 由上述讨论以及式(5.1.2), 总有$a_1=ra_l$, $u_1r=v_1r$. 即A满足条件(E). □

定理 5.1.9 设S是幺半群，如果S满足下述条件：存在$k\in N$, 使得对S中任意无穷序列 $(s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots)$, $s_i\in S\backslash\{1\}$, 都有自然数 $n>k$, 使得$s_1s_2\cdots s_{k-1}s_ks_{k+1}\cdots s_n=s_1s_2\cdots s_{k-1}s_{k+1}\cdots s_n$. 则每一个满足条件(P)的左$S$ -系是强平坦的.

证明 设A是满足条件(P)的左S -系, 对任意的$u_1,v_1\in S,a_1\in A$, 若$u_1a_1=v_1a_1$, 则存在$u_i,v_i\in S,a_i\in A,i=2,3,\cdots$, 使得引理5.1.6中的等式组成立. 对$U$和$V$,由$S$的定义,存在$n_1,n_2\in N(n_1>k,\ n_2>k)$,使得下式成立:

$$u_2\cdots u_{k-1}u_ku_{k+1}\cdots u_{n_1}=u_2\cdots u_{k-1}u_{k+1}\cdots u_{n_1}, \tag{5.1.15}$$

$$v_2\cdots v_{k-1}v_kv_{k+1}\cdots v_{n_2}=v_2\cdots v_{k-1}v_{k+1}\cdots v_{n_2}. \tag{5.1.16}$$

则有以下两种情形:

情形(1) k为奇数，由式(5.1.15)和式(5.1.16),则总能取到奇数$l>k$, 使得下式成立:

$$u_2u_3\cdots u_{k-1}u_ku_{k+1}\cdots u_l = u_2u_3\cdots u_{k-1}u_{k+1}\cdots u_l, \tag{5.1.17}$$

$$v_2v_3\cdots v_{k-1}v_kv_{k+1}\cdots v_l = v_2v_3\cdots v_{k-1}v_{k+1}\cdots v_l. \tag{5.1.18}$$

此时由式(5.1.1)显然

$$\begin{aligned}&u_2u_3\cdots u_{k-1}u_ku_{k+1}\cdots u_l\\=&v_2v_3\cdots v_{k-1}v_kv_{k+1}\cdots v_l,\end{aligned}$$

而由式(5.1.17)和式(5.1.18)，有

$$\begin{aligned}&u_1(u_2u_3\cdots u_{k-1}u_ku_{k+1}\cdots u_l) = u_1u_2u_3\cdots u_{k-1}u_{k+1}\cdots u_l\\=&v_1v_2v_3\cdots v_{k-1}v_{k+1}\cdots v_l = v_1(v_2v_3\cdots v_{k-1}v_kv_{k+1}\cdots v_l).\end{aligned}$$

情形(2) k为偶数，由式(5.1.15)和式(5.1.16),则总能取到偶数$l > k$, 使得下式成立:

$$u_2u_3\cdots u_{k-1}u_ku_{k+1}\cdots u_l = u_2u_3\cdots u_{k-1}u_{k+1}\cdots u_l, \tag{5.1.19}$$

$$v_2v_3\cdots v_{k-1}v_kv_{k+1}\cdots v_l = v_2v_3\cdots v_{k-1}v_{k+1}\cdots v_l. \tag{5.1.20}$$

此时由式(5.1.1)显然

$$\begin{aligned}&u_1u_2\cdots u_{k-1}u_ku_{k+1}\cdots u_l\\=&v_1v_2\cdots v_{k-1}v_kv_{k+1}\cdots v_l,\end{aligned}$$

而由式(5.1.19)和式(5.1.20)，有

$$\begin{aligned}&u_2u_3\cdots u_{k-1}u_ku_{k+1}\cdots u_l = u_2u_3\cdots u_{k-1}u_{k+1}\cdots u_l\\=&v_2v_3\cdots v_{k-1}v_{k+1}\cdots v_l = v_2v_3\cdots v_{k-1}v_kv_{k+1}\cdots v_l.\end{aligned}$$

总之，令$r = u_2\cdots u_l = v_2\cdots v_l$, 由上述讨论以及式(5.1.2), 总有$a_1 = ra_l$, $u_1r = v_1r$. 即A满足条件(E). □

定理 5.1.10 设S是幺半群，如果S满足下述条件: 存在偶数$k \in N(k \geqslant 2)$, 使得对S中任意无穷序列$(s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots)$, $s_i \in S\backslash\{1\}$, 都有自然数$n > k$,使得$s_1s_2\cdots s_{k-1}s_ks_{k+1}\cdots s_n = s_ks_{k+1}\cdots s_n$. 则每一个满足条件(P)的左$S$ -系是强平坦的.

证明 设A是满足条件(P)的左S-系，对任意的$u_1, v_1 \in S, a_1 \in A$，若$u_1a_1 = v_1a_1$，则存在$u_i, v_i \in S, a_i \in A, i = 2, 3, \cdots$，使得引理5.1.6中的等式组成立. 对$U$和$V$，由$S$的定义，存在$n_1, n_2 \in N(n_1 > k+1,\ n_2 > k+1)$，使得下式成立:

$$u_2u_3\cdots u_{k-1}u_ku_{k+1}\cdots u_{n_1} = u_{k+1}u_{k+2}\cdots u_{n_1}, \tag{5.1.21}$$

$$v_2v_3\cdots v_{k-1}v_kv_{k+1}\cdots v_{n_2} = v_{k+1}v_{k+2}\cdots v_{n_2}. \tag{5.1.22}$$

取$n = \max\{n_1, n_2\}$，由式(5.1.21)和式(5.1.22)以及定理的条件，取偶数$l > n$，使得下式成立:

$$u_2u_3\cdots u_{k-1}u_ku_{k+1}\cdots u_l = u_{k+1}u_{k+2}\cdots u_l, \tag{5.1.23}$$

$$v_2v_3\cdots v_{k-1}v_kv_{k+1}\cdots v_l = v_{k+1}v_{k+2}\cdots v_l. \tag{5.1.24}$$

此时由式(5.1.1)显然

$$\begin{aligned}&u_1u_2\cdots u_{k-1}u_ku_{k+1}\cdots u_l\\ =&v_1v_2\cdots v_{k-1}v_kv_{k+1}\cdots v_l,\end{aligned}$$

而由式(5.1.23)和式(5.1.24)，有

$$\begin{aligned}&u_2u_3\cdots u_{k-1}u_ku_{k+1}\cdots u_l = u_{k+1}u_{k+2}\cdots u_l\\ =&v_{k+1}v_{k+2}\cdots v_l = v_2v_3\cdots v_{k-1}v_kv_{k+1}\cdots v_l.\end{aligned}$$

总之，令$r = u_2\cdots u_l = v_2\cdots v_l$，由上述讨论以及式(5.1.2)，总有$a_1 = ra_l$，$u_1r = v_1r$. 即$A$满足条件(E). □

利用上述定理，很容易得下述结论.

推论 5.1.11 设T是null半群: 任意的$t, t' \in T$，$tt' = 0$. 令$S = T^1$，则每一个满足条件(P)的左S-系是强平坦的.

推论 5.1.12 设S是幂等元幺半群，则每一个满足条件(P)的左S-系是强平坦的.

§5.2 平坦性和条件(P)一致的幺半群

命题 5.2.1 设J是S的真左理想. 则S -系$A(J)$满足条件(E), 但不满足条件(P).

证明 由$A(J)$的构造容易验证. □

命题 5.2.2 设J是S的真左理想,则如下几条是等价的:

(1) $A(J)$是平坦的;

(2) $A(J)$是弱平坦的;

(3) $A(J)$是主弱平坦的;

(4) 对任意$j \in J, j \in jJ$.

证明 (1)⇒(2)⇒(3)显然.

(3)⇒(4)设$A(J)$是主弱平坦的. 因为对于$j \in J$,有$j(1,x) = (j,z) = j(1,y)$, 所以在$S \otimes A(J)$ 中有$j \otimes (1,x) = j \otimes (1,y)$. 则$A(J)$的主弱平坦性可知在$jS \otimes A(J)$中有$j \otimes (1,x) = j \otimes (1,y)$. 所以存在$j_2, \cdots, j_n \in jS, a_1, \cdots, a_n \in A(J), s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$,使得

$$
\begin{aligned}
& & (1,x) &= s_1 a_1, \\
js_1 &= j_2 t_1, & t_1 a_1 &= s_2 a_2, \\
j_2 s_2 &= j_3 t_2, & t_2 a_2 &= s_3 a_3, \\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\
j_n s_n &= j t_n, & t_n a_n &= (1,y).
\end{aligned}
$$

设$a_i = (p_i, w_i)$,其中$p_i \in S, w_i \in \{x,y,z\}$.由上述等式组知肯定存在某个$i$,使得$w_i = z$, 因此$t_i p_i \in J$. 所以, $j = js_1p_1 = j_2t_1p_1 = j_2s_2p_2 = \cdots = j_is_ip_i = j_{i+1}t_ip_i \in j_{i+1}J$. 又$j_{i+1} \in jS$,故$j \in jJ$.

(4)⇒(1)设A是任意右S -系, $a, a' \in A, m, m' \in A(J)$,在$A \otimes A(J)$中有$a \otimes m = a' \otimes m'$. 要证明在$(aS \cup a'S) \otimes A(J)$中有$a \otimes m = a' \otimes m'$.

设$m, m' \in S(1,x)$, 则在$A \otimes S(1,x)$中有$a \otimes m = a' \otimes m'$(利用命题4.2.13容易证明). 而$S(1,x) \simeq S$是自由$S$ -系,从而是平坦的,所以在$(aS \cup a'S) \otimes S(1,x)$中, 因此在$(aS \cup a'S) \otimes A(J)$中,有$a \otimes m = a' \otimes m'$. 若$m, m' \in S(1,y)$,则可采用类似的证明.

因此可设$m = (s,x), m' = (t,y)$,其中$s,t \in S - J$. 由命题4.2.13知存在$u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n \in S, a_2, \cdots, a_n \in A, m_i = (p_i, w_i) \in A(J)$,其中$p_i \in$

$S, w_i \in \{x, y, z\}$,使得:

$$\begin{aligned} & & (s,x) &= u_1(p_1,w_1) \\ au_1 &= a_2v_1, & v_1(p_1,w_1) &= u_2(p_2,w_2), \\ a_2u_2 &= a_3v_2, & v_2(p_2,w_2) &= u_3(p_3,w_3), \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ a_nu_n &= a'v_n, & v_n(p_n,w_n) &= (t,y). \end{aligned}$$

显然存在i,使得$v_ip_i = u_{i+1}p_{i+1} \in J$,所以存在$r \in J$,使得$v_ip_i = u_{i+1}p_{i+1} = v_ip_ir$.因此, $as = au_1p_1 = a_2v_1p_1 = \cdots = a_{i+1}v_ip_i = a_{i+1}u_{i+1}p_{i+1} = \cdots = a'v_np_n = a't$,所以$asr = as = a't = a'tr$.在$aS \otimes A(J)$中计算:

$$\begin{aligned} a \otimes (s,x) &= a \otimes s(1,x) = as \otimes (1,x) = asr \otimes (1,x) \\ &= as \otimes r(1,x) = as \otimes (r,z). \end{aligned}$$

同理在$a'S \otimes A(J)$中有$a' \otimes (t,y) = a't \otimes (r,z)$. 所以在$(aS \cup a'S) \otimes A(J)$中有

$$a \otimes (s,x) = as \otimes (r,z) = a't \otimes (r,z) = a' \otimes (t,y). \qquad \square$$

定理 5.2.3 设所有平坦S -系满足条件(P),则$|E(S)| = 1$.

证明 设$e \in E(S)$, $e \neq 1$.则$Se \neq S$.显然对于任意$j = se \in Se, j = see \in jSe$, 所以由命题 5.2.2 知 $A(Se)$ 是平坦的,从而满足条件 (P). 这和命题 5.2.1矛盾. □

定理 5.2.4 如下两条是等价的:

(1) $|E(S)| = 1$;

(2) 对于S的任意有限生成真左理想J,存在$j \in J - jJ$.

证明 (1)⇒(2) 设$|E(S)| = 1$, 则 S 中的任意正则元是可逆元. 设 $J = Sx_1 \cup \cdots \cup Sx_n$是$S$的有限生成左理想,并且$J \neq S$. 如果$x_1 \notin x_1J$, 则证明完成.下设$x_1 \in x_1J$.不妨假定$x_1 = x_1ux_2$,其中$u \in S$. 如果$x_2 \notin x_2J$, 则证明完成.下设$x_2 \in x_2J$. 因为$x_2 \notin x_2Sx_1 \cup x_2Sx_2$, 所以可设$x_2 = x_2vx_3$, 其中$v \in S$.继续上述讨论,可知存在$x_i$满足$x_i \notin x_iJ$.

(2)⇒(1)由定理5.2.3的证明即得结论. □

定理5.2.3和定理5.2.4给出了所有平坦S -系满足条件(P)的两个必要条件.下面要给出例子说明存在满足$|E(S)| = 1$的幺半群S, 其上的平坦S -系可以不满足条件(P).

例 5.2.5 设G是群, T是没有幂等元的右单半群(如T是Bear-Levi半群).令$S = G\dot{\cup}T$, 对$\forall\ g_1, g_2, g \in G$, $\forall\ t_1, t_2, t \in G$, 规定$S$中的乘法为:

$$g_1g_2 \in G, \quad t_1t_2 \in T, \quad tg = gt = t.$$

容易验证 S 是幺半群并且只有一个幂等元. 显然 T 是 S 的真左理想, 对任意$t \in T$, $tT = T$, 所以$t \in tT$. 所以由命题5.2.2知$A(T)$是平坦S -系.但由命题5.2.1知$A(T)$不满足条件(P).

例5.2.5选自文献[172]，其中的S是不交换的.下面给出一个满足要求的交换幺半群的例子.为此先证明:

命题 5.2.6 对于幺半群S,以下几条等价:

(1) 对于每个真左理想J,存在$j \in J - jJ$.

(2) S中的任意无穷元素链$x_0, x_1, \cdots$, 若$x_i = x_ix_{i+1}, i = 0, 1, \cdots$, 则存在自然数$n$,使得$x^n = x^{n+1} = \cdots = 1$.

证明 (1)⇒(2)考虑S的左理想$J = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} Sx_i$. 对于任意$j \in J$,存在$x_i$和$s \in S$,使得

$$j = sx_i = sx_ix_{i+1} = jx_{i+1} \in jJ,$$

所以由(1)即知$J = S$.因此存在x_n和$t \in S$,使得$1 = tx_n$. 所以$x_{n+1} = 1 \cdot x_{n+1} = tx_nx_{n+1} = tx_n = 1$,因此$x_{n+2} = \cdots = 1$.

(2)⇒(1)设J是S的真左理想. 取$x_0 \in J$. 若$x_0 \notin x_0J$,则证明完成. 设$x_0 \in x_0J$,则存在$x_1 \in J$,使得$x_0 = x_0x_1$. 若$x_1 \notin x_1J$,则证明完成.设$x_1 \in x_1J$,则存在$x_2 \in J$,使得$x_1 = x_1x_2$.继续上述过程,可得到两种情形:

(i)存在某个i,使得$x_i \notin x_iJ$.

(ii)存在无穷元素链$x_0, x_1, \cdots$,使得$x_i = x_ix_{i+1}, i = 0, 1, \cdots$. 若(ii)成立,则由条件知存在n,使得$x_n = x_{n+1} = \cdots = 1$,所以$J = S$.矛盾.故(i)成立. □

下面的例子5.2.7选自文献[185].

例 5.2.7 定义$(-\infty, \infty)$上的部分映射

$$f_i(x) = \begin{cases} i - 1 + \frac{1}{2}(x - i + 1), & i - 1 \leqslant x \leqslant i, \\ x, & x < i - 1, \end{cases}$$

$i = 1, 2, \cdots$. 容易证明$f_if_{i+1} = f_{i+1}f_i = f_i$. 因此对任意$i > j$,有$f_if_j = f_jf_i = f_j$. 令

$$S = \{f_i^n | i = 1, 2, \cdots, n = 1, 2, \cdots\} \cup \{1\},$$

其中$1:(-\infty,\infty)\to(-\infty,\infty)$是单位映射. 显然$S$是交换幺半群.容易证明当$x\in(i-1,i)$时,

$$f_i^n(x)=i-1+\frac{1}{2^n}(x-i+1),$$

所以f_i^n不是幂等元,故$|E(S)|=1$.

显然S中有无穷元素链$f_1,f_2,\cdots$, 满足$f_i=f_if_{i+1},i=1,2,\cdots$. 所以由命题5.2.6知存在$S$的真左理想$J$,使得对任意$j\in J,j\in jJ$.

这个例子说明定理5.2.4(2)中的"有限生成"不能去掉,即使S是交换幺半群.对于上述J,由命题5.2.2知$A(J)$是平坦的.但由命题5.2.1知$A(J)$不满足条件(P).所以平坦S-系可以不满足条件(P), 即使S是交换幺半群并且$|E(S)|=1$.

定理 5.2.8 所有平坦系是强平坦的$\Leftrightarrow S=\{1\}$.

证明 若$S=\{1\}$,则所有S-系是自由的,所以任意平坦S-系是强平坦的.

设所有平坦S-系是强平坦的,则由定理5.2.3和定理5.1.5知$|E(S)|=1$,并且对任意$x\in S$,存在自然数n,使得$x^{n+1}=x^n$. 所以$x^n\in E(S)$,从而$x^n=1$.因此x是可逆元.再由$x^{n+1}=x^n$即得$x=1$.所以$S=\{1\}$. □

如何刻画所有平坦S-系满足条件(P)的幺半群至今仍是一个未解决的问题.下面是一些部分的解答,另外一些部分的解答见§ 5.13.

定理 5.2.9 对于幺半群S,以下三条等价:

(1) S是左可消幺半群;

(2) S是右PP的,且所有平坦S-系满足条件(P);

(3) S是右PP的,且所有弱平坦S-系满足条件(P).

证明 (1)⇒(3)当S是左可消幺半群时,S显然是右PP的.设A是弱平坦S-系, $a,a'\in A,x,y\in S$满足$xa=ya'$. 由定理4.5.5知存在$a''\in A,u,v,x_1,y_1\in S$,使得$xu=x,yv=y,xx_1=yy_1,ua=x_1a'',va'=y_1a''$. 由$S$的左可消性知$u=1=v$, 所以$a=x_1a'',a'=y_1a''$. 因此$A$满足条件(P).

(3)⇒(2)显然.

(2)⇒(1)由定理5.2.3知$|E(S)|=1$. 设$r,x,y\in S$满足$rx=ry$. 因为S是右PP的,所以由命题2.5.1知存在$e\in E(S)$, 使得$r=re$, 且$rx=rx\Rightarrow ex=ey$. 特别地$ex=ey$. 但$e=1$,所以$x=y$. 这说明S是左可消的. □

定理 5.2.10 设S是右PSF幺半群,则以下几条是等价的:

(1) 所有平坦S-系满足条件(P);

(2) 所有弱平坦S-系满足条件(P);

(3) 对于S的任意真左理想J,存在$j\in J-jJ$.

证明 (2)⇒(1)显然.

(1)⇒(3)由命题5.2.1和命题5.2.2即得结论.

(3)⇒(2) 设A是弱平坦S-系, $a, a' \in A, x, y \in S$,满足$xa = ya'$.由定理4.5.5知存在$a'' \in A, x_1, y_1, u, v \in S$,满足

$$xu = x, \quad yv = y, \quad xx_1 = yy_1,$$
$$ua = x_1a'', \quad va' = y_1a''.$$

因为S是右PSF幺半群,所以由定理4.4.13知x是S的左半可消元. 因此由$xu = x$可知存在$x_1 \in S$, 使得$x = xx_1, x_1u = x_1$.同样由定理4.4.13知x_1也是左半可消元,所以存在$x_2 \in S$,使得$x_1 = x_1x_2, x_2u = x_2$. 继续上述过程,可以得到无限元素链$x, x_1, \cdots$,满足

$$x_i = x_ix_{i+1}, \quad x_iu = x_i, \quad i = 1, 2, \cdots.$$

由命题5.2.6知存在自然数n, 使得$x_n = x_{n+1} = \cdots = 1$. 所以$u = 1$. 同理可以证明$v = 1$.所以$a = x_1a'', a' = y_1a'', xx_1 = yy_1$. 即$A$满足条件(P). □

由命题5.2.1和5.2.2知若所有平坦S-系满足条件(P),则对于S的任意真左理想J,存在$j \in J - jJ$.下面给出例子说明反过来的结论是不成立的,即定理5.2.10中的条件 “S 是右 PSF 幺半群” 不能去掉. 为此先证明一个命题, 该命题以后要多次使用.

命题 5.2.11　设S是幺半群, λ是S上的左同余.则S-系S/λ 是弱平坦的当且仅当对任意$u, v \in S$, 若$u\lambda v$,则存在$s, t \in S$,使得$us = vt$,并且$s(\lambda v \vee u)1, t(\lambda \vee \Delta v)1$.这里$\Delta u$是如下定义的$S$上的右同余:

$$x \ \Delta u \ y \Leftrightarrow ux = uy.$$

证明　设S/λ是弱平坦的, $u, v \in S$,满足$u\lambda v$.则$u\bar{1} = v\bar{1}$. 由定理4.5.2知存在$a \in S/\lambda, z \in uS \cap vS$, 使得$u\bar{1} = v\bar{1} = za$. 设$a = w\bar{1}, w \in S, z = us = vt, s, t \in S$,则有

$$u \cdot \bar{1} = zw\bar{1} = usw \cdot \bar{1},$$
$$v \cdot \bar{1} = zw\bar{1} = vtw \cdot \bar{1}.$$

因此在$S \otimes S/\lambda$中有$u \otimes \bar{1} = 1 \otimes \bar{u} = 1 \otimes \overline{usw} = 1 \otimes u \cdot \overline{sw} = u \otimes \overline{sw}$.由于$S/\lambda$是弱平坦的,所以在$uS \otimes S/\lambda$中有$u \otimes \bar{1} = u \otimes \overline{sw}$. 因此存在$s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$,使

得:

$$
\begin{aligned}
& & \bar{1} &= s_1\bar{1}, \\
us_1 &= ut_1, & t_1\bar{1} &= s_2\bar{1}, \\
us_2 &= ut_2, & t_2\bar{1} &= s_3\bar{1}, \\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\
us_n &= ut_n, & t_n\bar{1} &= \overline{sw}.
\end{aligned}
$$

所以有:

$$sw\lambda t_n(\varDelta u)s_n\lambda t_{n-1}(\varDelta u)s_{n-1}\cdots(\varDelta u)s_1\lambda 1,$$

即$sw(\lambda\vee\varDelta u)1$. 同理可以证明$tw(\lambda\vee\varDelta v)1$. 显然还有

$$usw=vtw,$$

所以结论成立.

反过来,在题设条件下,要证明S/λ是弱平坦的. 设$u,v\in S$,并且在$S\otimes S/\lambda$中有$u\otimes\bar{1}=v\otimes\bar{1}$. 要证明在$(uS\cup vS)\otimes S/\lambda$中也有$u\otimes\bar{1}=v\otimes\bar{1}$, 易知有$u\cdot\bar{1}=v\cdot\bar{1}$, 即$u\lambda v$. 由条件知存在$s,t\in S$,使得$us=vt, s(\lambda\vee\varDelta u)1, t(\lambda\vee\varDelta v)1$. 设$x_0,y_1,x_1,\cdots,x_n,y_{n+1},z_0,w_1,z_1,\cdots,z_m,w_{m+1}\in S$, 使得:

$$
\begin{aligned}
1&=x_0\lambda y_1(\varDelta u)x_1\lambda y_2(\varDelta u)x_2\cdots(\varDelta u)x_n\lambda y_{n+1}=s,\\
t&=z_0\lambda w_1(\varDelta v)z_1\lambda w_2(\varDelta v)z_2\cdots(\varDelta v)z_m\lambda w_{m+1}=1.
\end{aligned}
$$

在$(uS\cup vS)\otimes S/\lambda$中进行计算:

$$
\begin{aligned}
u\otimes\bar{1}&=u\otimes\overline{x_0}=u\otimes\overline{y_1}=uy_1\otimes\bar{1}=ux_1\otimes\bar{1}=u\otimes\overline{x_1}\\
&=u\otimes\overline{y_2}=uy_2\otimes\bar{1}=ux_2\otimes\bar{1}=u\otimes\overline{x_2}=\cdots=u\otimes\overline{x_n}\\
&=u\otimes\overline{y_{n+1}}=u\otimes\bar{s}=us\otimes\bar{1}=vt\otimes\bar{1}=v\otimes\bar{t}=v\otimes\overline{z_0}\\
&=v\otimes\overline{w_1}=\cdots=v\otimes\overline{w_m}=vw\otimes\bar{1}=vz_m\otimes\bar{1}=v\otimes\overline{z_m}\\
&=v\otimes\overline{w_{m+1}}=v\otimes\bar{1}.
\end{aligned}
$$

所以S/λ是弱平坦S -系. □

例 5.2.12 设$S=\langle x,y|xy=x^2=yx\rangle\cup\{1\}$.令$\lambda=\lambda(x,x^2)\vee\lambda(1,y^2)$. 则有:

(i) S是交换幺半群;

(ii)对S的任意真理想J,存在元素$j\in J-jJ$;

(iii)S/λ是平坦S -系,但不满足条件(P).

证明　首先，$S=\{x^n|n$ 是自然数$\}\bigcup\{y^n|n$ 是自然数$\}\bigcup\{1\}$，其运算为 $x^ny^m=y^mx^n=x^{m+n}$. 显然S是交换幺半群,并且对任意n,y^n是S的可消元. 若$j=jj'$,则容易知道$j'=1$. 所以(ii)成立.

对于S作如下的分类:

$$[x]=\{x^n|n=1,2,\cdots\};$$
$$[1]=\{y^{2n}|n=1,2,\cdots\}\cup\{1\};$$
$$[y]=\{y^1,y^3,y^5,\cdots\}.$$

容易证明该分类决定的等价关系σ是S上的同余,并且$\sigma=\lambda$.即λ决定的λ-类只有上述三类.

设$u,v\in S$满足$u\lambda v$, 则有下述三种情形:

(a) $x^m\lambda x^n$. 不妨设$1\leqslant m\leqslant n$. 若$m=n$,则令$s=t=1$,显然有$us=vt,s(\lambda\vee\Delta u)1(\lambda\vee\Delta v)t$. 设$m<n$.此时有$x^mx^{n-m}=x^n\cdot 1$.令$s=x^{n-m},t=1$,则$us=vt,t(\lambda\vee\Delta v)1$,而$x^{n-m}\lambda x^{2(n-m)}(\Delta x^m)y^{2(n-m)}\lambda 1$, 即$s(\lambda\vee\Delta u)1$.

(b) $y^{2m}\lambda y^{2n}$. 不妨设$0\leqslant m\leqslant n$(约定$y^0=1$). 此时有$y^{2m}\cdot y^{2n-2m}=y^{2n}\cdot 1$. 令$s=y^{2n-2m}$, $t=1$,则$s\lambda 1$, 从而$s(\lambda\vee\Delta u)1$.

(c) $y^{2m-1}\lambda y^{2n-1}$.不妨设$1\leqslant m\leqslant n$.同样有$y^{2m-1}\cdot y^{2n-2m}=y^{2n-1}\cdot 1$, $y^{2n-2m}\lambda 1$.

所以由命题5.2.11知S/λ是弱平坦左S -系.又S是交换幺半群,所以由§5.3的定理5.3.10 即知S/λ是平坦的.

设S/λ满足条件(P). 因为$x\lambda x^2$,所以由命题5.1.1知存在$s,t\in S$,使得$xs=x^2t$, 并且$s\lambda 1\lambda t$. 显然$s,t\in[1]$.因此xs是x的奇数次幂,而x^2t是x的偶数次幂.这说明$xs\neq x^2t$.矛盾.因此S/λ不满足条件(P). □

这个例子也说明条件“对S的任意真左理想J,存在$j\in J-jJ$”不能保证所有循环平坦S -系满足条件(P).

§5.3　弱平坦性和平坦性一致的幺半群

平坦系一定是弱平坦系,但弱平坦系不一定是平坦系.本节讨论几类使得所有弱平坦系是平坦系的特殊幺半群,其主要内容取自于Bulman-Fleming和McDowell的论文[43].

引理 5.3.1　设A是右S -系, B是左S -系,并且B是主弱平坦的. 若$a,a_1\in A$, $b,b_1\in B,s_1\in S$满足$a=a_1s_1,s_1b=s_1b_1$,则在$aS\otimes B$中有$a\otimes b=a\otimes b_1$.

证明 因为$s_1b = s_1b_1$, 所以在$S \otimes B$中有$s_1 \otimes b = s_1 \otimes b_1$. 又$B$是主弱平坦的, 所以在$s_1S \otimes B$中有$s_1 \otimes b = s_1 \otimes b_1$. 因此存在$b_2, \cdots, b_n \in B$, $u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n \in S$,使得

$$\begin{aligned} s_1 &= s_1u_1, & & \\ s_1v_1 &= s_1u_2, & u_1b &= v_1b_2, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ s_1v_n &= s_1, & u_nb_n &= v_nb_1. \end{aligned}$$

所以在$aS \otimes B$中有

$$\begin{aligned} a \otimes b &= a_1s_1 \otimes b = a_1s_1u_1 \otimes b = au_1 \otimes b = a \otimes u_1b \\ &= a \otimes v_1b_2 = av_1 \otimes b_2 = \cdots = av_n \otimes b_1 \\ &= a_1s_1v_n \otimes b_1 = a_1s_1 \otimes b_1 = a \otimes b_1. \end{aligned}$$ □

引理 5.3.2 设A是任意右S -系, B是弱平坦左S -系. 若$a, a' \in A, b, b' \in B$,满足

$$\begin{aligned} a &= a_1s_1, & & \\ a_1t_1 &= a', & s_1b &= t_1b', \end{aligned}$$

其中$s_1, t_1 \in S, a_1 \in A$,则在$(aS \cup a'S) \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$.

证明 因为 B 是弱平坦的,所以由定理 4.5.2 知存在 p, $q \in S, b'' \in B$, 使得$s_1p = t_1q$并且$s_1b = t_1b' = s_1pb'' = t_1qb''$.由引理5.3.1知在$aS \otimes B$中有$a \otimes b = a \otimes pb'' = ap \otimes b''$. 同理在$a'S \otimes B$中有$a' \otimes b' = a'q \otimes b''$. 而$ap = a_1s_1p = a_1t_1q = a'q$, 所以在$(aS \cup a'S) \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$. □

设$x, y \in S$.记$\rho(x, y)$为S上的由(x, y)生成的最小右同余.

定理 5.3.3 设S是右PSF幺半群,并且对于任意$u, v \in S$,存在$z \in Su \cap Sv$,使得$(z, u) \in \rho(u, v)$,则所有弱平坦S -系是平坦的.

证明 设B是弱平坦S -系, A是任意右S -系, $a, a' \in A, b, b' \in B$, 在$A \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$. 要证明在$(aS \cup a'S) \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$. 由定理4.1.2知存在$a_1, \cdots, a_n \in A, b_2, \cdots, b_n \in B$, $s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$,使得

$$\begin{aligned} a &= a_1s_1, & & \\ a_1t_1 &= a_2s_2, & s_1b &= t_1b_2, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ a_nt_n &= a', & s_nb_n &= t_nb'. \end{aligned}$$

对n使用数学归纳法证明结论.

设$n=1$.此时有

$$a=a_1s_1,$$
$$a_1t_1=a',\qquad s_1b=t_1b'.$$

所以由引理5.3.2即知在$A\otimes B$中有$a\otimes b=a'\otimes b'$.

设$n\geqslant 2$. 令$b_1=b, b_{n+1}=b'$. 对于$s_ib_i=t_ib_{i+1}$, 考察定理4.5.5的证明过程可知存在$u_i,v_i,x_i,y_i\in S, b_i''\in B$,使得

$$s_iu_i=s_i,\quad t_iv_i=t_i,\quad s_ix_i=t_iy_i,$$
$$u_ib_i=u_ix_ib_i'',\quad v_ib_{i+1}=v_iy_ib_i''.$$

对于u_{i+1}和v_i,由条件知存在$p_i,q_i\in S$,使得

$$p_iv_i=q_iu_{i+1},$$

并且$(q_iu_{i+1},u_{i+1})\in\rho(u_{i+1},v_i)$. 定义

$$\rho_i=\{(s,t)\in S\times S|a_{i+1}s_{i+1}s=a_{i+1}s_{i+1}t\},$$

则ρ_i是S上的右同余. 因为$a_{i+1}s_{i+1}u_{i+1}=a_{i+1}s_{i+1}=a_it_i=a_it_iv_i=a_{i+1}s_{i+1}v_i$, 所以$(u_{i+1},v_i)\in\rho_i$. 因此由条件知$(q_iu_{i+1},u_{i+1})\in\rho_i$,故有

$$a_{i+1}s_{i+1}q_iu_{i+1}=a_{i+1}s_{i+1}u_{i+1}=a_{i+1}s_{i+1}.$$

因此,

$$\begin{aligned}(a_is_i)q_{i-1}u_ix_i&=a_is_ix_i=a_it_iy_i=a_{i+1}s_{i+1}y_i\\&=a_{i+1}s_{i+1}q_iu_{i+1}y_i=a_{i+1}s_{i+1}p_iv_iy_i,\end{aligned}$$
$$p_{i-1}v_{i-1}y_{i-1}b_{i-1}''=p_{i-1}(v_{i-1}b_i)=q_{i-1}u_ib_i=q_{i-1}u_ix_ib_i''.$$

又因为

$$\begin{aligned}au_1x_1&=a_1s_1u_1x_1=a_1s_1x_1=a_1t_1y_1=a_2s_2y_1\\&=a_2s_2q_1u_2y_1=(a_2s_2)p_1v_1y_1,\end{aligned}$$
$$(a_ns_n)q_{n-1}u_nx_n=a_ns_nx_n=a_nt_ny_n=a_nt_nv_ny_n=a'v_ny_n,$$

所以有如下的等式组:

$$
\begin{array}{ll}
a = au_1, & \\
au_1x_1 = (a_2s_2)p_1v_1y_1, & u_1b = u_1x_1b_1'', \\
(a_2s_2)q_1u_2x_2 = (a_3s_3)p_2v_2y_2, & p_1v_1y_1b_1'' = q_1u_2x_2b_2'', \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
(a_is_i)q_{i-1}u_ix_i = (a_{i+1}s_{i+1})p_iv_iy_i, & p_{i-1}v_{i-1}y_{i-1}b_{i-1}'' = q_{i-1}u_ix_ib_i'', \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
(a_ns_n)q_{n-1}u_nx_n = a'v_ny_n, & p_{n-1}v_{n-1}y_{n-1}b_{n-1}'' = q_{n-1}u_nx_nb_n''. \\
a'v_n = a', & v_ny_nb_n'' = v_nb'.
\end{array}
$$

对于上述等式组中的中间$2n-1$个等式应用归纳假定可知在$(au_1x_1S)\cup(a'v_ny_nS)\otimes B$中有

$$au_1x_1 \otimes b_1'' = a'v_ny_n \otimes b_n''.$$

利用最前面的两行等式可知在$aS \otimes B$中有

$$a \otimes b = a_2s_2p_1v_1y_1 \otimes b_1''.$$

同理可知在$a'S \otimes B$中有

$$a' \otimes b' = a_ns_nq_{n-1}u_nx_n \otimes b_n''.$$

于是在$(aS \cup a'S) \otimes B$中有

$$
\begin{aligned}
a \otimes b &= a_2s_2p_1v_1y_1 \otimes b_1'' = au_1x_1 \otimes b_1'' \\
&= a'v_ny_n \otimes b_n'' = a_ns_nq_{n-1}u_nx_n \otimes b_n'' = a' \otimes b'.
\end{aligned}
$$

这就证明了B是平坦左S -系. □

定理 5.3.4 设S是右PP幺半群,并且对于任意$u, v \in E(S)$,存在$z \in Su \cap Sv$,使得$(z, u) \in \rho(u, v)$,则所有弱平坦S -系是平坦的.

证明 考察定理5.3.3的证明过程.由推论4.5.5知当S是右PP幺半群时,上述证明过程中的u_i, v_i都是幂等元.所以类似于定理5.3.3的证明即可完成本定理的证明. □

推论 5.3.5 设所有右S -系都是弱平坦的,则所有弱平坦左S -系是平坦的.

证明 由定理4.5.12和定理5.3.3即得结论. □

推论 5.3.6 若所有左、右S -系都是弱平坦的,则所有左、右S -系都是平坦的.

证明　由推论5.3.5即得本结论. □

设S是幺半群, B是弱平坦S -系, A是任意右S -系, $a,a'\in A,b,b'\in B$, 在$A\otimes B$中有$a\otimes b=a'\otimes b'$. 对于特殊的幺半群S,为证明B是平坦的,只需证明在$(aS\cup a'S)\otimes B$中有$a\otimes b=a'\otimes b'$即可. 由定理4.1.2知存在$a_1,\cdots,a_n\in A,b_2,\cdots,b_n\in B$, $s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n\in S$,使得:

$$\begin{aligned}
&a=a_1s_1,\\
&a_1t_1=a_2s_2, && s_1b=t_1b_2,\\
&\cdots\cdots && \cdots\cdots\\
&a_it_i=a_{i+1}s_{i+1}, && s_ib_i=t_ib_{i+1},\\
&\cdots\cdots && \cdots\cdots\\
&a_nt_n=a', && s_nb_n=t_nb'.
\end{aligned}$$

由引理5.3.2知当 $n=1$ 时结论成立. 因此可以利用数学归纳法来完成证明. 如果$a_it_i=a_{i+1}s_{i+1}\in aS\cup a'S,i\in\{1,\cdots,n-1\}$, 那么使用两次归纳假定即知在$(aS\cup a'S)\otimes B$中有$a\otimes b=a_it_i\otimes b_{i+1}=a'\otimes b'$. 特别地, 如果$t_1\in s_1S$或者$s_n\in t_nS$, 则在$(aS\cup a'S)\otimes B$中有$a\otimes b=a'\otimes b'$. 如果某个$s_i=1$, $i\in\{2,\cdots,n\}$,则有如下的等式组:

$$\begin{aligned}
&a=a_1s_1,\\
&a_1t_1=a_2s_2, && s_1b=t_1b_2,\\
&\cdots\cdots && \cdots\cdots\\
&a_{i-1}(t_{i-1}t_i)=a_{i+1}s_{i+1}, && s_{i-1}b_{i-1}=(t_{i-1}t_i)b_{i+1},\\
&\cdots\cdots && \cdots\cdots\\
&a_nt_n=a', && s_nb_n=t_nb'.
\end{aligned}$$

所以由归纳假定即知结论成立.如果某个$t_i=1,i\in\{1,\cdots,n-1\}$,同上类似的证明即知结论成立.

下面利用上述讨论给出几个定理.

定理 5.3.7　设S是(带零)半群,并且是其极小(带零)右理想的并,则任意弱平坦S^1-系是平坦的.

证明　设B是弱平坦S^1-系, A是任意右S^1-系, $a,a'\in A,b,b'\in B$, 在$A\otimes B$中有$a\otimes b=a'\otimes b'$. 所以存在$a_1,\cdots,a_n\in A,b_2,\cdots,b_n\in B$, $s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n\in$

S',使得

$$\begin{aligned} a &= a_1 s_1, & & \\ a_1 t_1 &= a_2 s_2, & s_1 b &= t_1 b_2, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ a_n t_n &= a', & s_n b_n &= t_n b'. \end{aligned}$$

要用数学归纳法证明在$(aS^1 \cup a'S^1) \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$.

由上述讨论可知,可假定$n \geqslant 2$,并且s_1, t_1, s_n, t_n都不是1.

首先假定S不含零元.此时对任意$x \in S$有$xS = xS^1$. 对于等式$s_1 b = t_1 b_2$,利用定理4.5.2知存在$z \in s_1S^1 \cap t_1S^1 = s_1S \cap t_1S, b'' \in B$,使得$s_1 b = t_1 b_2 = zb''$. 所以$s_1S \cap t_1S \neq \varnothing$. 由条件即知$s_1S = t_1S$, 从而$t_1 \in s_1S^1$, 由前面的讨论即知结论成立.

下设S带有零元.如果$s_1S^1 \cap t_1S^1 \neq \{0\}$, 那么$t_1 \in s_1S^1$, 因此结论成立. 如果$s_nS^1 \cap t_nS^1 \neq \{0\}$, 则类似的讨论即可完成证明.下设$s_1S^1 \cap t_1S^1 = s_nS^1 \cap t_nS^1 = \{0\}$. 由定理4.5.2知存在$\alpha_1, \beta_1, \alpha_n, \beta_n \in S^1, c_1, c_n \in B$,使得$s_1\alpha_1 = t_1\beta_1 = 0 = s_n\alpha_n = t_n\beta_n$, $s_1 b = t_1 b_2 = 0c, s_n b_n = t_n b' = 0c_n$. 因为$a = a_1 s_1, s_1 b = s_1\alpha_1 c$, 所以由引理5.3.1知在$aS^1 \otimes B$中有$a \otimes b = a \otimes \alpha_1 c$. 同理在$a'S^1 \otimes B$中有$a' \otimes b' = a' \otimes \beta_n c_n$. 从上述等式组容易得知$0b = 0b'$, 因此$0c = 0s_1 b = 0b = 0b' = 0t_n b' = 0c_n$. 又$a\alpha_1 = a_1 s_1 \alpha_1 = a_1 0 = a0 = a'0 = a_n 0 = a_n t_n \beta_n = a'\beta_n$, 所以在$(aS^1 \cup a'S^1) \otimes B$中有:

$$\begin{aligned} a \otimes b &= a \otimes \alpha_1 c = a\alpha_1 \otimes c = a0 \otimes c = a \otimes 0c \\ &= a \otimes 0c_n = a0 \otimes c_n = a'\beta_n \otimes c_n \\ &= a' \otimes \beta_n c_n = a' \otimes b'. \end{aligned}$$

□

推论 5.3.8 设S是完全(0-)单半群,则任意弱平坦S^1-系是平坦的.

定理 5.3.9 设 S 是交换幺半群, 并且其所有主理想形成链, 则任意弱平坦 S -系是平坦的.

证明 设B是弱平坦S -系, A是任意右S -系, $a, a' \in A, b, b' \in B$,在$A \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$, 则存在$a_1, \cdots, a_n \in A, b_2, \cdots, b_n \in B, s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$,使得

$$
\begin{array}{ll}
a = a_1 s_1, & \\
a_1 t_1 = a_2 s_2, & s_1 b = t_1 b_2, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
a_{i-1} t_{i-1} = a_i s_i, & s_{i-1} b_{i-1} = t_{i-1} b_i, \\
a_i t_i = a_{i+1} s_{i+1}, & s_i b_i = t_i b_{i+1}, \\
a_{i+1} t_{i+1} = a_{i+2} t_{i+2}, & s_{i+1} b_{i+1} = t_{i+1} b_{i+2}, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
a_n t_n = a', & s_n b_n = t_n b'.
\end{array}
$$

对n用数学归纳法证明在$(aS \cup a'S) \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$.

设$n = 1$.则由引理5.3.2知结论成立.

设$n \geqslant 2$. 为了方便,令$a_0 = a, a_{n+1} = a', b_1 = b, b_{n+1} = b', t_0 = 1, s_{n+1} = 1$. 设$s_i \in t_i S$, 这里$i \in \{1, \cdots, n-1\}$. 如果还有$s_{i+1} \in t_i S$, 则存在$x, y \in S$, 使得$s_i = t_i x, s_{i+1} = t_i y$. 所以$a_{i-1} t_{i-1} = a_i s_i = a_i t_i x = a_{i+1} s_{i+1} x$, $s_{i+1} x b_i = t_i y x b_i = y x t_i b_i = y t_i x b_i = y s_i b_i = y t_i b_{i+1} = s_{i+1} b_{i+1} = t_{i+1} b_{i+2}$. 因此上述框线以内的等式组可用下面的等式组来代替:

$$
\begin{array}{ll}
a_{i-1} t_{i-1} = a_{i+1} s_{i+1} x, & \\
a_{i+1} t_{i+1} = a_{i+2} s_{i+2}, & s_{i+1} x b_i = t_{i+1} b_{i+2},
\end{array}
$$

所以由归纳假定即知结论成立.

因此, 当$s_i \in t_i S$时,还可以假定$t_i \in s_{i+1} S$. 同理, 当$t_i \in s_{i+1} S$时, 还可假定$s_{i+1} \in t_{i+1} S$.

设$t_1 \in s_1 S$, 则由前面讨论知结论成立. 设$s_1 \in t_1 S$, 则由上述讨论可知可以假定$t_1 \in s_2 S$, 进而可以假定$s_2 \in t_2 S, \cdots$, 最后可以假定$s_n \in t_n S$, 所以由前面的讨论知结论成立. □

定理 5.3.10　设S是交换幺半群,则任意循环的弱平坦S -系是平坦的.

证明　设$B = Sb$是循环的弱平坦S -系, A是任意右S -系, $a, a' \in A$, 在$A \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b$. 只需证明在$(aS \cup a'S) \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b$即可. 由定理4.1.2易知存在$a_1, \cdots, a_n \in A$, $s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$,使得

$$
\begin{array}{ll}
a = a_1 s_1, & \\
a_1 t_1 = a_2 s_2, & s_1 b = t_1 b,
\end{array}
$$

$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots$$
$$a_n t_n = a', s_n b = t_n b.$$

对于任意$i \in \{1, \cdots, n\}$, 由定理4.5.2知存在$\alpha_i, \beta_i \in S$, 使得$s_i\alpha_i = t_i\beta_i$并且$s_i b = t_i b = s_i\alpha_i b = t_i\beta_i b$. 令$\beta_0 = 1, s_{n+1} = 1, a_{n+1} = a'$. 下面对$i$用数学归纳法证明如下论断:

对任意$i \in \{1, \cdots, n\}, a_{i+1}s_{i+1}\beta_1 \ldots \beta_i \in aS$并且在$aS \otimes Sb$中有$a_i s_i \beta_1 \ldots \beta_{i-1} \otimes b = a_{i+1}s_{i+1}\beta_1 \cdots \beta_i \otimes b$.

设$i = 1$. 因为$a = a_1 s_1, s_1 b = s_1(\alpha_1 b)$, 所以由引理5.3.1知在$aS \otimes Sb$中有$a \otimes b = a \otimes \alpha_1 b$. 显然, $a_2 s_2 \beta_1 = a_1 t_1 \beta_1 = a_1 s_1 \alpha_1 = a\alpha_1 \in aS$, 所以在$aS \otimes Sb$中有

$$a_1 s_1 \beta_0 \otimes b = a \otimes b = a \otimes \alpha_1 b = a_1 s_1 \alpha_1 \otimes b = a_2 s_2 \beta_1 \otimes b.$$

因为$a_{i+1}s_{i+1}\beta_1 \ldots \beta_i = a_{i+1}(s_{i+1}\beta_1 \ldots \beta_i)$, $(s_{i+1}\beta_1 \ldots \beta_i)b = \beta_1 \ldots \beta_i s_{i+1} b = \beta_1 \ldots \beta_i s_{i+1}\alpha_{i+1} b = (s_{i+1}\beta_1 \ldots \beta_i)\alpha_{i+1} b$, 所以由引理 5.3.1 知在 $a_{i+1}s_{i+1}\beta_1 \ldots \beta_i S \otimes Sb$中有

$$a_{i+1}s_{i+1}\beta_1 \ldots \beta_i \otimes b = a_{i+1}s_{i+1}\beta_1 \ldots \beta_i \otimes \alpha_{i+1} b.$$

又

$$\begin{aligned} a_{i+1}s_{i+1}\beta_1 \ldots \beta_i \alpha_{i+1} &= a_{i+1}s_{i+1}\alpha_{i+1}\beta_1 \ldots \beta_i \\ &= a_{i+1}t_{i+1}\beta_{i+1}\beta_1 \ldots \beta_i = a_{i+2}s_{i+2}\beta_1 \ldots \beta_i\beta_{i+1}, \end{aligned}$$

所以由归纳假定即知结论成立.

因此, 在$aS \otimes Sb$中有

$$\begin{aligned} a \otimes b &= a_2 s_2 \beta_1 \otimes b = \ldots = a_n s_n \beta_1 \ldots \beta_{n-1} \otimes b \\ &= a_{n+1}s_{n+1}\beta_1 \ldots \beta_n \otimes b = a'\beta_1 \ldots \beta_n \otimes b. \end{aligned}$$

同理在$a'S \otimes Sb$中有

$$a' \otimes b = a\alpha_1 \ldots \alpha_n \otimes b.$$

因为

$$\begin{aligned} a\alpha_1 \ldots \alpha_n &= a_1 s_1 \alpha_1 \ldots \alpha_n = a_1 t_1 \beta_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n = a_2 s_2 \beta_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \\ &= a_2 s_2 \alpha_2 \ldots \alpha_n \beta_1 = a_2 t_2 \beta_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n \beta_1 \\ &= \cdots = a_n t_n \beta_n \beta_1 \ldots \beta_{n-1} = a'\beta_1 \ldots \beta_n, \end{aligned}$$

所以在$(aS \cup a'S) \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b$. □

§5.4　左绝对平坦幺半群

定义 5.4.1　称幺半群S是绝对平坦的,如果所有S -系是平坦的.

设S是群, 则由定理4.2.9知所有S -系满足条件(P), 从而所有S -系是平坦的, 所以任意群是左绝对平坦的.

如何用元素、理想等给出左绝对平坦幺半群的特征刻画,至今仍是一个没有解决的问题. 本节要证明S是左绝对平坦的当且仅当任意有限生成S系是平坦的,同时还要给出左绝对平坦幺半群的若干等价刻画.

设n是自然数,以S^{2n}表示$2n$个集合S的卡氏积,即

$$S^{2n} = S \times S \times \cdots \times S = \{(s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n) | s_i, t_i \in S\}.$$

设$\bigcup\limits_{i=1}^{n} x_i S$是$n$个生成元的自由右$S$ -系, $\bigcup\limits_{j=1}^{n+1} S y_j$是$n+1$个生成元的自由左$S$ -系. 对任意$\alpha = (s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n) \in S^{2n}$,令

$$\begin{aligned}
H_\alpha &= \{(x_1 t_1, x_2 s_2), \ldots, (x_{n-1} t_{n-1}, x_n s_n)\}, \\
K_\alpha &= \{(s_1 y_1, t_1 y_2), \ldots, (s_n y_n, t_n y_{n+1})\}, \\
F_\alpha &= (\bigcup_{i=1}^{n} x_i S)/\rho(H_\alpha), \\
G_\alpha &= (\bigcup_{j=1}^{n+1} S y_j)/\lambda(K_\alpha),
\end{aligned}$$

这里$\rho(H_\alpha), \lambda(K_\alpha)$分别表示$\bigcup\limits_{i=1}^{n} x_i S$和$\bigcup\limits_{j=1}^{n+1} S y_j$上的由$H_\alpha, K_\alpha$生成的最小同余.

一个显然的事实是:在张量积$F_\alpha \otimes G_\alpha$中有: $\overline{x_1} s_1 \otimes \overline{y_1} = \overline{x_1} \otimes s_1 \overline{y_1} = \overline{x_1} \otimes t_1 \overline{y_2} = \overline{x_2} s_2 \otimes \overline{y_2} = \cdots = \overline{x_n} s_n \otimes \overline{y_n} = \overline{x_n} \otimes s_n \overline{y_n} = \overline{x_n} \otimes t_n \overline{y_{n+1}} = \overline{x_n} t_n \otimes \overline{y_{n+1}}$, 这里$\overline{x}$表示$x$所在的同余类.

定理 5.4.2　对于幺半群S,以下几条等价:

(1) S是左绝对平坦的;

(2) 所有有限生成S -系是平坦的;

(3) 所有有限表示S -系是平坦的;

(4) 对任意自然数n,任意$\alpha = (s_1, \cdots, s_n, t_1, \cdots, t_n) \in S^{2n}$, 在$(\overline{x_1} s_1 S \cup \overline{x_n} t_n S) \otimes G_\alpha$中有$\overline{x_1} s_1 \otimes \overline{y_1} = \overline{x_n} t_n \otimes \overline{y_{n+1}}$.

证明　(1)⇒(2)⇒(3)⇒(4)是显然的,只需证明(4)⇒(1).

设A是右S-系, B是左S-系, $a, a' \in A, b, b' \in B$, 在$A \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$. 由定理4.1.2知存在$a_1, \cdots, a_n \in A, b_2, \cdots, b_n \in B, s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$, 使得:

$$\begin{aligned} & a = a_1 s_1, & \\ & a_1 t_1 = a_2 s_2, & s_1 b = t_1 b_2, \\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ & a_n t_n = a', & s_n b_n = t_n b'. \end{aligned}$$

令$\alpha = (s_1, \cdots, s_n, t_1, \cdots, t_n) \in S^{2n}$. 利用条件(4)知存在$z_1, \cdots, z_m \in x_1 s_1 S \cup x_n t_n S, w_2, \cdots, w_m \in G_\alpha, u_1, v_1, \cdots, u_m, v_m \in S$,使得:

$$\begin{aligned} & \overline{x_1} s_1 = \overline{z_1} u_1, & \\ & \overline{z_1} v_1 = \overline{z_2} u_2, & u_1 \overline{y_1} = v_1 \overline{w_2}, \\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ & \overline{z_m} v_m = \overline{x_n} t_n, & u_m \overline{w_m} = v_m \overline{y_{n+1}}. \end{aligned} \tag{5.4.1}$$

显然可以假定$z_1, \cdots, z_m \in \{x_1 s_1, x_n t_n\}$.

如下定义S-同态$\varphi_1 : \bigcup\limits_{i=1}^{n} x_i S \to A$和$\varphi_2 : \bigcup\limits_{j=1}^{n+1} S y_j \to B$为

$$\begin{aligned} & \varphi_1(x_i s) = a_i s, \ \forall\, i \in \{1, \cdots, n\}, \ \forall s \in S; \\ & \varphi_2(s y_j) = s b_j, \ \forall j \in \{2, \cdots, n\}, \ \forall s \in S; \\ & \varphi_2(s y_1) = s b, \ \varphi_2(s y_{n+1}) = s b', \ \forall s \in S. \end{aligned}$$

显然$H_\alpha \subseteq \mathrm{Ker}\varphi_1, K_\alpha \subseteq \mathrm{Ker}\varphi_2$, 所以$\rho(H_\alpha) \subseteq \mathrm{Ker}\varphi_1, \lambda(K_\alpha) \subseteq \mathrm{Ker}\varphi_2$. 因此$\varphi_1$和$\varphi_2$分别诱导出$S$-同态$\overline{\varphi_1} : F\alpha \to A$, $\overline{\varphi_2} : G_\alpha \to B$. 用$\overline{\varphi_1}$和$\overline{\varphi_2}$作用于等式组(5.4.1)即得:

$$\begin{aligned} & a = a_1 s_1 = \overline{\varphi_1}(\overline{z_1}) u_1, & \\ & \overline{\varphi_1}(\overline{z_1}) v_1 = \overline{\varphi_1}(\overline{z_2}) u_2, & u_1 b = v_1 \overline{\varphi_2}(\overline{w_2}), \\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ & \overline{\varphi_1 z_m} v_m = a_n t_n = a', & u_m \overline{\varphi_2}(\overline{w_n}) = v_m b'. \end{aligned}$$

因为$z_i \in \{x_1 s_1, x_n t_n\}$, 所以$\overline{\varphi_1}(\overline{z_i}) \in \{a, a'\}, i = 1, \cdots, m$. 因此在$(aS \cup a'S) \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$. 故$B$是平坦的.从而$S$是左绝对平坦幺半群. □

由§ 4.5的结果可知, 所有S-系是(主)弱平坦的当且仅当所有循环S-系是(主)弱平坦的.但对于平坦性,类似的结果不成立,即当所有循环S-系都是平坦系时,可以有非平坦的S-系存在.为了说明这一点,先证明下面的定理.

定理 5.4.3　设 $\dot{\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}} S_\alpha$,其中$\Gamma$是链,每个$S_\alpha$是右零带,则以下两条是等价的:

(1) 所有循环S -系是平坦的;

(2) 设$\alpha,\beta\in\Gamma,\alpha<\beta$, 则$S_\beta$中的任意两个元素在$S_\alpha$中有下界.

证明　(1)⇒(2)设α, $\beta\in\Gamma$, $\alpha<\beta$, $a,b\in S_\beta$. 对任意$u,v\in S$, 以$\rho(u,v)$和$\lambda(u,v)$分别表示S上的由(u,v)生成的最小右、左同余. 设$t\in S_\alpha$, 则在$S/\rho(a,b)\otimes S/(\lambda(a,ta)\vee\lambda(b,tb))$中有$\overline{ta}\otimes\overline{1}=\overline{1}\otimes\overline{ta}=\overline{1}\otimes\overline{a}=\overline{a}\otimes\overline{1}=\overline{b}\otimes\overline{1}=\overline{1}\otimes\overline{b}=\overline{1}\otimes\overline{tb}=\overline{tb}\otimes\overline{1}$, 这里$\overline{u}$表示$u$所在的$\rho(a,b)$类或$\lambda(a,ta)\vee\lambda(b,tb)$-类. 记$S_{(\alpha]}=\dot{\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma}} S_\gamma(\gamma\leqslant\alpha)$, 则$S_{(\alpha]}$是$S$的右理想. 作$S$ -同态$\varphi: S_{(\alpha]}\to S/\rho(a,b)$为:$\varphi(s)=\overline{s},s\in S_{(\alpha]}$. 设$s,t\in S_{(\alpha]}$,并且$\varphi(s)=\varphi(t)$, 则$s\rho(a,b)t$. 所以$s=t$或存在$t_1,\cdots,t_n\in S$, 使得

$$s=c_1t_1,d_1t_1=c_2t_2,\cdots,d_nt_n=t,$$

其中$\{c_i,d_i\}=\{a,b\},i=1,\cdots,n$.设$s\in S_\delta,\delta\leqslant\alpha$.则容易得出$t_1\in S_\delta$.由于$S_\delta$是右零带,所以$s=c_1t_1=(c_1t_1)t_1=t_1$. 同理$d_1t_1=c_2t_2\in S_\delta,t_2\in S_\delta$,所以$t_1=(d_1t_1)t_1=d_1t_1=c_2t_2=(c_2t_2)t_2=t_2$. 类似地可以证明$t_2=t_3=\cdots=t_n=t$. 所以$s=t$.这说明$\varphi$是单同态. 因为$S/(\lambda(a,ta)\vee\lambda(b,tb))$是平坦的, 所以在$S_{(\alpha]}\otimes S/(\lambda(a,ta)\vee\lambda(b,tb))$中有$ta\otimes\overline{1}=tb\otimes\overline{1}$. 利用定理4.1.2容易证明$(ta,tb)\in\lambda(a,ta)\vee\lambda(b,tb)$. 所以$ta=tb$, 或者存在$s_1,\cdots,s_n\in S,(x_i,y_i)\in\{(a,ta),(b,tb),(ta,a),(tb,b)\}$,使得:

$$\begin{aligned}ta&=s_1x_1,\\ s_1y_1&=s_2x_2,\\ &\cdots\cdots\\ s_ny_n&=tb.\end{aligned}$$

记ta为s_0y_0, 则存在$i\in\{0,1,\cdots,n\}$,使得$s_iy_i\in Sa\cap Sb$. 所以$ts_iy_i\in S_\alpha$是a和b的下界.

(2)⇒(1) 设Sb是任意循环S-系, A是右S-系, $a, a' \in A$, 在$A \otimes Sb$中有$a \otimes b = a' \otimes b$, 则存在$a_1, \cdots, a_n \in A, b_2, \cdots, b_n \in B$, $s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$,使得

$$\begin{aligned} &a = a_1 s_1, \\ &a_1 t_1 = a_2 s_2, \qquad s_1 b = t_1 b, \\ &\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots \\ &a_n t_n = a', \qquad s_n b = t_n b. \end{aligned}$$

下面对n利用数学归纳法证明在$(aS \cup a'S) \otimes Sb$中有$a \otimes b = a' \otimes b$.

$n = 1$时,由等式组

$$\begin{aligned} &a = (as_1)s_1, \\ &(as_1)t_1 = (a's_1)t_1, \qquad s_1 b = t_1 b', \\ &(a's_1)s_1 = a's_1, \qquad s_1 b' = s_1 b, \\ &a' t_1 = a', \qquad s_1 b = t_1 b'. \end{aligned}$$

即知在$(aS \cup a'S) \otimes Sb$中有$a \otimes b = a' \otimes b$, 这里第二个等式是如下证明的: $(as_1)t_1 = a_1 s_1 t_1 = a_1 t_1 s_1 t_1 = a' s_1 t_1$.

设$n \geqslant 2$. 假定$s_1 \in S_\alpha, t_1 s_2 \cdots t_{n-1} s_n \in S_\beta, t_n \in S_\delta$. 如果$\alpha \geqslant \beta$, 则$s_1 t_1 s_2 \cdots t_{n-1} s_n \in S_\beta$. 又因为$\Gamma$是链, 所以存在$t_i$或$s_{i+1}$ $(i = 1, \cdots, n-1)$, 使得$t_i \in S_\beta$或$s_{i+1} \in S_\beta$. 不妨设$t_i \in S_\beta$. 因为S_β是右零带, 所以有

$$t_i = s_1 t_1 s_2 \cdots t_{n-1} s_n t_i,$$

因此, 若$i = 1$, 则$a_1 t_1 = a_1 s_1 t_1 s_2 \cdots t_{n-1} s_n t_1 = a t_1 s_2 \cdots t_{n-1} s_n t_1 \in aS \cup a'S$. 设$i \geqslant 2$.则

$$\begin{aligned} a_i t_i &= a_i s_1 t_1 s_2 \cdots t_{i-1} s_i \cdots t_{n-1} s_n t_i \\ &= a_i s_i (s_1 t_1 s_2 \cdots t_{i-1}) s_i \cdots t_{n-1} s_n t_i \\ &= a_{i-1} t_{i-1} s_1 t_1 s_2 \cdots s_{i-1} t_{i-1} s_i \cdots t_{n-1} s_n t_i \\ &= a_{i-1} s_{i-1} (t_{i-1} s_1 t_1 s_2 \cdots) s_{i-1} t_{i-1} \cdots t_{n-1} s_n t_i \\ &= \cdots = a_1 s_1 \cdots t_{n-1} s_n t_i \in aS \cup a'S. \end{aligned}$$

若$s_{i+1} \in S_\beta$,则同样有

$$\begin{aligned} a_i t_i &= a_{i+1} s_{i+1} = a_{i+1} s_1 t_1 s_2 \cdots t_{n-1} s_n s_{i+1} \\ &= a_{i+1} s_{i+1} s_1 t_1 s_2 \cdots s_{i+1} \cdots t_{n-1} s_n s_{i+1} \in aS \cup a'S. \end{aligned}$$

总之, 当$\alpha \geqslant \beta$时, 存在$i \in \{1, \cdots, n-1\}$,使得$a_i t_i \in aS \cup a'S$. 考虑如下的两个等式组:

$$\begin{aligned} a &= a_1 s_1, & & \\ a_1 t_1 &= a_2 s_2, & s_1 b &= t_1 b, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ a_i t_i &= a_{i+1} s_{i+1}, & s_i b &= t_i b. \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} a_i t_i &= a_{i+1} s_{i+1}, & & \\ a_{i+1} t_{i+1} &= a_{i+2} s_{i+2}, & s_{i+1} b &= t_{i+1} b, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ a_n t_n &= a', & s_n b &= t_n b. \end{aligned}$$

由归纳假定可知在$(aS \cup a'S) \otimes Sb$中有$a \otimes b = a_{i+1} s_{i+1} \otimes b = a_i t_i \otimes b = a' \otimes b$.

同理,若$\delta \geqslant \beta$, 则结论也成立. 因此假定$\alpha < \beta$, $\delta < \beta$. 再不妨设$\alpha \geqslant \delta$.任取$x \in S_\beta$, 则$xt_1, xs_n \in S_\beta$. 所以由(2)知存在$y \in S_\alpha$, 使得$yxt_1 = y = yxs_n$. 显然$yx \in S_\alpha$, 而S_α是右零带, 所以$(yx)s_1 = s_1$. 又S_δ是右零带, 所以$(yxt_n)t_n = t_n$. 因此有$s_1 b = yxs_1 b = yxt_1 b = yb = yxs_n b = yxt_n b = (yxt_n)t_n b = t_n b$. 故有如下的等式组:

$$\begin{aligned} a &= as_1, & & \\ at_n &= a', & s_1 b &= t_n b. \end{aligned}$$

所以由归纳假定知在$(aS \cup a'S) \otimes Sb$中$a \otimes b = a' \otimes b$.

因此Sb是平坦的. □

下面给出一个所有循环S -系都平坦但不是左绝对平坦幺半群的例子.

例 5.4.4 设$X = \{1,2,3,4,5,6\}, \alpha_i (i = 1, \cdots, 6), \beta, \gamma, \delta$ 是X上的映射,其定义如下:

$$\alpha_i(x) = i, \quad \forall\, x \in X, \quad i = 1, 2, \cdots, 6,$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\delta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&2&3&3&2&6\end{pmatrix}.$$

设ϵ是X上的单位映射,则$S=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$ 是$\mathscr{T}_X$的子幺半群.设$\Gamma=\{0,1,2\}$是链, 其序规定为$0<1<2$.令$S_0=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_6\},S_1=\{\beta,\gamma,\delta\},S_2=\{\varepsilon\}$, 则$S_0,S_1,S_2$均为右零带.容易验证$S$满足定理5.4.3中的(2),所以任意循环$S$ -系是平坦的. 又因为S_1中的三个元素在S_0中没有下界, 所以由§6.4的结果知S不是左绝对平坦幺半群.

§5.5 循环系的平坦性与条件(P)

这一节以及§5.6、§5.7考虑循环S -系的平坦性、强平坦性及条件(P)等性质,主要目的是研究所有循环平坦系满足条件(P)的幺半群以及所有循环平坦系是强平坦系的幺半群. 设I是幺半群S的左理想，记S/λ_I为由I确定的Rees商系.

命题 5.5.1 设S是幺半群, I是S的真左理想, 则下述条件等价:

(1) S/λ_I是自由的;

(2) S/λ_I是投射的;

(3) S/λ_I是强平坦的;

(4) S/λ_I满足条件(P);

(5) $|I|=1$.

证明 (1)⇒(2)⇒(3)⇒(4) 显然.

(4)⇒(5) 设S/λ_I满足条件(P). 取$x,y\in I$,则$x\lambda_I y$. 所以由命题5.1.1知存在$u,v\in S$, 使得$xu=yv$, 并且$u\lambda_I 1\lambda_I v$. 因为I是S的真左理想, 所以$1\notin I$. 因此$u=1=v$, 从而$x=y$. 所以$|I|=1$.

(5)⇒(1)若$|I|=1$,则$S/\lambda_I\simeq S$是自由的. □

命题 5.5.2 设$x\in S$. 则$S/\lambda(x,x^2)$满足条件(P)当且仅当$x=x^2$或x是左可逆元.

证明 若$x=x^2$, 则$S/\lambda(x,x^2)\simeq S$, 所以满足条件(P). 若x是左可逆元,则$\lambda(x,x^2)=\lambda(1,x)$, 所以由命题5.1.3知$S/\lambda(x,x^2)$满足条件(P).

反之,设$S/\lambda(x,x^2)$满足条件(P), 并且$x\neq x^2$, 因为$x\lambda(x,x^2)x^2$, 所以由命题5.1.1知存在$s,t\in S$,使得$xs=x^2t$, 并且$s\lambda(x,x^2)1\lambda(x,x^2)t$, 设$s\neq 1$, 则由$s\lambda(x,x^2)1$可知存在$u,v\in S$, 使得$s=ux,1=vx$,所以$x$是左可逆元.设$s=1$, 则$t\neq 1$.同理由$t\lambda(x,x^2)1$知$x$是左可逆元. □

以下考虑所有循环(平坦)S -系满足条件(P)的幺半群，其主要结果选自文献[172]和[185].

定理 5.5.3 如下两条等价:

(1) 所有循环S -系满足条件(P);

(2) S是群或带零群.

证明　(1)⇒(2)设所有循环S -系满足条件(P),则对任意$x \in S, x^2 = x$或x是左可逆元. 如果任意$x \in S$都是左可逆元, 则S是群.设x不是左可逆的,则Sx是S的真左理想.因为S/λ_{Sx}满足条件(P), 所以由命题5.5.1知$|Sx| = 1$, 即x是S的右零元.

设I是S的所有右零元构成的集合. 若$I \neq \emptyset$, 则I是S的左理想. 如果$1 \in I$,则$S = \{1\}$. 设$1 \notin I$. 由于S/λ_I满足条件(P), 所以由命题5.1.1知$|I| = 1$. 因此S包含唯一的右零元.

令$G = S - \{0\}$, 这里0是S的右零元. 如果$G = \emptyset$, 则$S = \{1\}$. 设$G \neq \emptyset$. 对任意$x \in G, x$是S的左可逆元. 取$x, y \in G$.如果$xy = 0$,则$y = x'xy = x'0 = 0$,矛盾,这里x'是x的左逆元. 所以$xy \in G$, 即G是S的子半群. 因为$1 \in G$,所以G是S的子群.设$x \in G$, 并且$0x \in G$, 则$0 = 0(xx') = (0x)x' \in G$,矛盾. 因此$0x = 0$, 即0是$S$的零元. 所以$S = G \dot{\cup} \{0\}$.

(2)⇒(1) 若S是群,则由定理4.2.9知任意S -系满足条件(P), 下设$S = G \dot{\cup} \{0\}$其中G是群. 设λ是S上的左同余, $s, t \in S$满足$s\lambda t$. 要证明存在$u, v \in S$,使得$su = tv$并且$u\lambda 1\lambda v$. 若$s = t = 0$,则取$u = v = 1$. 若$t \neq 0$, 则$t \in G$.取$u = 1, v = t^{-1}s$, 则$su = s = tt^{-1}s = tv$, 并且$u\lambda 1$. 又从$s\lambda t$即得$v = t^{-1}s\lambda t^{-1}t = 1$. 若$s \neq 0$,则采用类似的证明.因此由命题5.1.1即知$S/\lambda$满足条件(P). □

在定理 4.4.10 中已经证明了所有循环 S -系是强平坦的当且仅当 $S = \{1\}$或$S = \{1, 0\}$.利用定理5.5.3和定理5.1.5可以给出上述结果的又一证明: 设所有循环S -系是强平坦的,则由定理5.5.3知S是群或带零群.又所有满足条件(P)的循环S -系是强平坦的, 所以由定理5.1.5知对$x \in S$,存在自然数n, 使得$x^{n+1} = x^n$. 所以$S = \{1\}$或$S = \{1, 0\}$.反过来的证明由定理5.5.3和定理5.1.5易得.

推论 5.5.4　S是带零群的充要条件是: 所有循环S系满足条件(P),但存在不满足条件(P)的S -系.

证明　由定理5.5.3和定理4.2.9即得. □

由定理5.2.3知若所有平坦S -系满足条件(P), 则$|E(S)| = 1$.下面要证明,若S的任意两个主右理想有非空的交, 并且所有循环平坦 S -系满足条件 (P), 则$E(S) = \{1\}$或$E(S) = \{1, 0\}$.为此先证明

定理 5.5.5　设I是S的真左理想,则如下几条是等价的:

(1) S/λ_I是平坦的;

(2) S/λ_I是弱平坦的;

(3) $A(I)$是平坦的,并且S的任意两个右理想有非空的交;

(4) $A(I)$是弱平坦的,并且S的任意两个右理想有非空的交;

(5) 任意$x \in I$,必有$x \in xI$,并且S的任意两个右理想有非空的交.

证明 (1)⇒(2)显然.

由命题5.2.2即知(3)⇔(4)⇔(5).

(5)⇒(1)设A是任意右S -系, $a, a' \in A$, 在$A \otimes S/\lambda_I$中有$a \otimes \overline{1} = a' \otimes \overline{1}$.要证明在$(aS \cup a'S) \otimes S/\lambda_I$中有$a \otimes \overline{1} = a' \otimes \overline{1}$. 由定理4.1.2知存在$a_1, \cdots, a_n \in A$, $s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$,使得

$$
\begin{aligned}
&a = a_1 s_1, & & \\
&a_1 t_1 = a_2 s_2, & &\overline{s_1} = \overline{t_1}, \\
&a_2 t_2 = a_3 s_3, & &\overline{s_2} = \overline{t_2}, \\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\
&a_n t_n = a', & &\overline{s_n} = \overline{t_n}.
\end{aligned}
\tag{5.5.1}
$$

对n使用数学归纳法.

设$n = 1$,则$a = a_1 s_1, a' = a_1 t_1, \overline{s_1} = \overline{t_1}$. 若$s_1 = t_1$, 则$a = a'$, 所以在$(aS \cup a'S) \otimes S/\lambda_I$中有$a \otimes \overline{1} = a' \otimes \overline{1}$. 设$s_1 \neq t_1$, 则$s_1, t_1 \in I$. 所以存在$x, y \in I$, 使得$s_1 = s_1 x, t_1 = t_1 y$,又因为$s_1 S \cap t_1 S \neq \emptyset$, 所以存在$u, v \in S$, 使得$s_1 u = t_1 v$, 所以有如下的等式组:

$$
\begin{aligned}
&a = ax, & & \\
&a(uy) = a'(vy), & &\overline{x} = \overline{uy}, \\
&a'y = a', & &\overline{vy} = \overline{y},
\end{aligned}
$$

由此即知在$(aS \cup a'S) \otimes S/\lambda_I$中有$a \otimes \overline{1} = a' \otimes \overline{1}$.

设$n \geqslant 2$. 若$s_1 = t_1$或$s_2 = t_2$,则等式组(5.5.1)可以用一个个数较少的等式组来代替,所以由归纳假定即知结论成立. 设$s_1 \neq t_1$, 并且$s_2 \neq t_2$, 则$s_1, t_1, t_2 \in I$. 所以存在$x_1, y_1 \in I$, 使得$s_1 = s_1 x_1, t_1 = t_1 y_1$. 同样存在$u, v \in S$, 使得$s_1 u = t_1 v$. 所以$auy_1 = a_1 s_1 u y_1 = a_1 t_1 v y_1 = a_2 s_2 v y_1$. 故有如下的等式组:

$$
\begin{aligned}
&a = a x_1, & & \\
&a(uy_1) = a_2(s_2 v y_1), & &\overline{x_1} = \overline{uy_1}, \\
&a_2 t_2 = a_3 s_3, & &\overline{s_2 v y_1} = \overline{t_2}, \\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\
&a_n t_n = a', & &\overline{s_n} = \overline{t_n}.
\end{aligned}
$$

使用两次归纳假定可知在$(aS \cup a_2s_2vy_1S) \otimes S/\lambda_I$中有$a \otimes \overline{1} = a_2s_2vy_1 \otimes \overline{1}$;在$(auy_1S \cup a'S) \otimes S/\lambda_I$中有$auy_1 \otimes \overline{1} = a' \otimes \overline{1}$. 所以在$(aS \cup a'S) \otimes S/\lambda_I$中有$a \otimes \overline{1} = a' \otimes \overline{1}$. 故$S/\lambda_I$是平坦的.

(2)⇒(5)设$x \in I, y \in I$.若$x = xy$,则结论成立.下设$x \neq xy$. 在$S \otimes S/\lambda_I$中显然有$x \otimes \overline{1} = 1 \otimes \overline{x} = 1 \otimes \overline{xy} = xy \otimes \overline{1}$. 由于$S/\lambda_I$是平坦的, 所以在$(xS \cup xyS) \otimes S/\lambda_I$中有$x \otimes \overline{1} = xy \otimes \overline{1}$. 因此存在$s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$, 使得

$$
\begin{aligned}
&x = x_1s_1, \\
&x_1t_1 = x_2s_2, \qquad \overline{s_1} = \overline{t_1}, \\
&\quad \cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots \\
&x_nt_n = xy, \qquad \overline{s_n} = \overline{t_n}.
\end{aligned}
$$

其中$x_1, x_2, \cdots, x_n \in \{x, xy\}$. 若对任意$i \in \{1, \cdots, n\}$都有$s_i = t_i$, 则$x = x_1s_1 = x_1t_1 = x_2s_2 = \cdots = x_ns_n = s_nt_n = xy$,矛盾. 所以存在$i$, 使得$s_1 = t_1, \cdots, s_i = t_i$, 但$s_{i+1} \neq t_{i+1}$, 故$s_{i+1}, t_{i+1} \in I$. 因而$x = x_1s_1 = x_1t_1 = \cdots = x_it_i = x_{i+1}s_{i+1}$. 由于$x_{i+1} \in \{x, xy\}$, 所以$x \in xI$.

设J_1, J_2是S的两个右理想, 取$s \in J_1, t \in J_2, x \in I$,则在$S \otimes S/\lambda_I$中有$s \otimes \overline{x} = 1 \otimes \overline{sx} = 1 \otimes \overline{tx} = t \otimes \overline{x}$. 因为$S/\lambda_I$是平坦的, 所以在$(sS \cup tS) \otimes S/\lambda_I$中有$s \otimes \overline{x} = t \otimes \overline{x}$. 因此存在$u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n \in S$, 使得

$$
\begin{aligned}
&s = s_1u_1, \\
&s_1v_1 = s_2u_2, \qquad \overline{u_1x} = \overline{v_1}, \\
&\quad \cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots \\
&s_vt_n = t, \qquad \overline{u_n} = \overline{v_nx}.
\end{aligned}
$$

其中$s_1, \cdots, s_n \in \{s, t\}$. 显然存在$i$使得$s_i = s, s_{i+1} = t$, 所以$s_iv_i = s_{i+1}u_{i+1} \in sS \cap tS \subseteq J_1 \cap J_2$. □

在定理5.5.5中, 如果仅要求(1), (2)和(5)三条等价, 则对任意左理想都是成立的.

定理 5.5.6　设S的任意两个右理想有非空的交. 如果所有循环平坦S-系满足条件(P),则$E(S) = \{1\}$或$E(S) = \{1, 0\}$.

证明　设$e^2 = e \neq 1$. 则Se是S的真左理想.对任意$s \in S$, $se = see \in seSe$, 所以由定理5.5.5知S/λ_{Se}是平坦的,从而由条件知S/λ_{Se}满足条件(P),由命题5.5.1即知$|Se| = 1$. 所以e是S的右零元.

设I是S的所有右零元构成的集合.若$I \neq \emptyset$,则I是S的左理想.若$1 \in I$, 则$S = \{1\}$,故$E(S) = \{1\}$. 设$1 \notin I$, 对任意$e \in I$,显然有$e \in eI$,所以由定理5.5.5知S/λ_{Se}

是平坦的, 从而满足条件(P). 由命题5.5.1即知$|I|=1$. 即S具有唯一的右零元,所以S含有零元.

如上的证明表明, 若$e^2=e\neq 1$, 则$e=0$. 所以$E(S)=\{1,0\}$. □

例 5.5.7 考虑例5.2.7中定义的幺半群S.因为S是交换幺半群,所以S的任意两个右理想有非空的交.由例5.2.7知存在S的真左理想J, 使得对任意$j\in J, j\in jJ$. 所以由定理5.5.5知S/λ_I是平坦的. 但S/λ_I不满足条件(P). 否则,由命题5.5.1知$|J|=1$, 所以J中的唯一元素是幂等元. 而由例5.2.7知$|E(S)|=1$, 所以$J=S$,与J是真左理想的条件矛盾.

这个例子说明从条件$|E(S)|=1$不仅推不出所有平坦S -系满足条件(P), 而且也推不出所有循环平坦S -系满足条件(P). 所以定理5.5.6的逆不成立.

命题 5.5.8 设S的任意两个右理想有非空的交.如果任意循环平坦S -系满足条件(P), 则对于S的任意真左理想J, 若$|J|>1$, 则存在$j\in J-jJ$.

证明 设J是真左理想并且$|J|>1$.如果任意$j\in J$有$j\in jJ$,则由定理5.5.5知S/λ_J是平坦的,故S/λ_J满足条件(P). 所以由命题5.5.1知$|J|=1$.矛盾. □

定理 5.5.9 设S的任意两个右理想有非空的交,则如下几条是等价的:

(1) $S=C$或$S=C\dot\cup\{0\}$,其中C是左可消幺半群;

(2) S是右PP幺半群并且所有循环平坦S -系满足条件(P);

(3) S是右PP幺半群并且所有循环弱平坦S -系满足条件(P);

(4) S是右PP幺半群,并且对任意真左理想J,若$|J|>1$,则存在$j\in J-jJ$;

(5) S是右PSF幺半群并且所有循环平坦S -系满足条件(P);

(6) S是右PSF幺半群并且所有循环弱平坦S -系满足条件(P);

(7) S是右PSF幺半群, 并且对任意真左理想J, 若$|J|>1$,则存在$j\in J-jJ$.

证明 (1)⇒(4)若S是左可消幺半群,则由定理5.2.9知S是右PP的.设J 是S的真左理想,并且$|J|>1$. 对任意$j\in J$,若$j\in jJ$,则存在$j'\in J$, 使得$j=jj'$. 利用S的左可消性即知$j'=1$, 从而$J=S$,矛盾.所以$j\in J-jJ$.

设$S=C\dot\cup\{0\}$,其中C是左可消幺半群.显然对任意$0\neq x\in S$,有$xS\simeq S$, 所以S是右PP幺半群. 设J是真左理想并且$|J|>1$. 取$j\in J$但$j\neq 0$.若$j\in jJ$,则存在$j'\in J$, 使得$j=jj'$. 显然$j'\neq 0$. 因此$j'=1$, 从而$J=S$.矛盾. 所以$j\in J-jJ$.

(4)⇒(7)右PP幺半群是右PSF幺半群.

(7)⇒(6)首先证明当(7)成立时,必有$E(S)=\{1\}$或$E(S)=\{1,0\}$.设$1\neq e\in E(S)$. 则Se是S的真左理想. 因为对任意$s\in S$有$se=see\in seSe$, 所以由(7)知$|Se|=1$,故e是S的右零元,设I是S的所有右零元构成的集合,则I是S的左理想.若$1\in I$, 则$S=\{1\}$,从而$E(S)=\{1\}$. 设$1\notin I$,则I 是真左理想. 显然对任

意$e \in I$有$e \in eI$,所以由(7)知$|I| = 1$. 这说明S含有唯一的右零元,

易知唯一的右零元是S的零元,所以$e = 0$.故$E(S) = \{1, 0\}$.

设λ是S上的左同余,并且S/λ是弱平坦S -系.要证明S/λ满足条件(P). 设$x, y \in S, b, b' \in S/\lambda$满足$xb = yb'$. 考虑下述四种情形:

(i) $x \neq 0 \neq y$. 因为S/λ是弱平坦的,所以由定理4.5.5知存在$b'' \in S/\lambda, x_1, y_1, u, v \in S$, 使得:

$$
\begin{aligned}
&x = xu, \quad y = yv, \quad xx_1 = yy_1, \\
&ub = x_1 b'', \quad vb' = y_1 b''.
\end{aligned}
$$

因为S是右PSF幺半群,所以由定理4.4.13知x是左半可消元.因此由$x = xu$知存在$z_1 \in S$, 使得$x = xz_1, z_1 = z_1 u$. 显然z_1也是左半可消元,所以存在$z_2 \in S$,使得$z_1 = z_1 z_2, z_2 = z_2 u$. 继续上述过程就可得到无穷元素链$z_1, z_2, \cdots$,满足

$$z_i = z_i z_{i+1}, \quad z_i u = z_i, \quad i = 1, \cdots.$$

作左理想$J = \bigcup_{i=1}^{\infty} S z_i$. 对任意$j \in J, j = s z_i$,其中$s \in S$. 所以$j = s z_i = s z_i z_{i+1} \in jJ$.由条件即知$|J| = 1$或$J = S$.如果$|J| = 1$,则$x = xz_1 \in J$是$S$的右零元,所以$x \in E(S)$,但$x \neq 0$,所以$x = 1$,从而$S = J = \{1\}$,显然任意$S$ -系满足条件(P). 如果$J = S$, 则存在正整数n和$t \in S$, 使得$tz_n = 1$,因此$z_{n+1} = 1z_{n+1} = tz_n z_{n+1} = tz_n = 1$,从而$u = 1$.

类似的方法可以证明$v = 1$, 所以有

$$b = x_1 b'', \quad b' = y_1 b'', \quad xx_1 = yy_1.$$

(ii) $x = y = 0$. 设$b = s\overline{1}, b' = t\overline{1}$. 令$b'' = \overline{1}, x_1 = s, y_1 = t$, 则$b = x_1 b'', b' = y_1 b'', xx_1 = 0 = yy_1$.

(iii) $x \neq 0, y = 0$.此时$xb = yb' = \overline{0}$. 设$b = \overline{t}$,则在$S \otimes S/\lambda$ 中有$x \otimes \overline{t} = x \otimes \overline{0}$. 因为$S/\lambda$是弱平坦的, 所以在$xS \otimes S/\lambda$ 中有$x \otimes \overline{t} = x \otimes \overline{0}$. 因此存在$s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S, \overline{w_1}, \cdots, \overline{w_n} \in S/\lambda$, 使得:

$$
\begin{aligned}
& & \overline{t} &= s_1 \overline{w_1}, \\
xs_1 &= xt_1, & t_1 \overline{w_1} &= s_2 \overline{w_2}, \\
xs_2 &= xt_2, & t_2 \overline{w_2} &= s_3 \overline{w_3}, \\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\
xs_n &= xt_n, & t_n \overline{w_n} &= \overline{0}.
\end{aligned}
$$

因为x是左半可消元, 所以由$xs_i = xt_i$知存在$z_1 \in S$, 使得$z_1 s_i = z_1 t_i, x = xz_1$.利用上面类似的方法可以证明

$$s_1 = t_1, s_2 = t_2, \cdots, s_n = t_n.$$

因此,

$$b = \overline{t} = s_1\overline{w_1} = t_1\overline{w_1} = s_2\overline{w_2} = \cdots = s_n\overline{w_n} = t_n\overline{w_n} = \overline{0}.$$

令$b'' = b', x_1 = 0, y_1 = 1$, 则$xx_1 = 0 = yy_1, b = x_1 b'', b' = y_1 b''$.

(iv) $x = 0, y \neq 0$. 此时的证明和(iii)类似. 因此S/λ满足条件(P).

(6)⇒(5) 显然.

(5)⇒(1) 由命题5.5.8知对任意真左理想J, 若$|J| > 1$, 则存在$j \in J - jJ$. 类似于(7)⇒(6)的证明可知$E(S) = \{1\}$或$E(S) = \{1, 0\}$. 设$E(S) = \{1\}$.对任意$x, s, t \in S$,若$xs = xt$,则类似于(7)⇒(6)的证明可得$s = t$.所以S是左可消的.

设$E(S) = \{1, 0\}$. 则0是非左可消元. 设d也是非左可消元, 则存在$x, y \in S$, 使得$dx = dy$但$x \neq y$. 因为S是右PSF的, 所以d是左半可消元.若$d \neq 0$, 则类似于(7)⇒(6)的证明即可得$x = y$, 矛盾. 所以$d = 0$. 这说明S含有唯一的非左可消元 0.

令$C = S - \{0\}$, 设$x, y \in C$满足$xy = 0$. 则由$xy = x0$ 得$y = 0$, 矛盾. 所以$xy \neq 0$. 这说明C是S的子半群. 显然C是左可消幺半群并且$S = C \dot{\cup} \{0\}$.

(3)⇒(2)显然.

(2)⇒(4)由命题5.5.8即得.

(4)⇒(3)类似于(7)⇒(6)的证明即可. □

下面的引理要多次使用,其证明可参看文献[75].

引理 5.5.10 设λ是S上的左同余. 则S/λ是平坦的当且仅当对于S上的任意右同余ρ, 任意$u, v \in S$, 若$u(\lambda \vee \rho)v$, 则存在$s, t \in S$, 使得$(us)\rho(vt)$, 并且$s(\lambda \vee \rho u)1, t(\lambda \vee \rho v)1$, 这是$\rho u$是如下定义的右同余:

$$x(\rho u)y \Leftrightarrow (ux)\rho(uy).$$

§5.6 循环平坦系的强平坦性

本节研究所有循环平坦S -系是强平坦系的幺半群,给出了这类幺半群的一个特征刻画. 利用所得结果还研究了所有循环平坦系满足条件(P)的右PSF幺半群. 本节的一部分内容选自Bulman-Fleming 和Normak 的论文[46].

先从下面的引理开始.

引理 5.6.1 设S是幺半群，$w,t \in S$,令$\lambda = \lambda(tw,t)$，则对任意$x,y \in S$, $x\lambda y$的充要条件是存在$m,n \geqslant 0$，使得$xw^m = yw^n$并且

$$xw^i \in St, \quad 0 \leqslant i < m,$$
$$yw^j \in St, \quad 0 \leqslant j < n.$$

证明　在S上定义关系θ如下：$x\theta y$当且仅当存在$m,n \geqslant 0$,使得$xw^m = yw^n$，并且$xw^i \in St(0 \leqslant i < m), yw^j \in St(0 \leqslant j < n)$.设$x\theta y, y\theta z$,则存在$m,n,l,k \geqslant 0$，使得$xw^m = yw^n, yw^l = zw^k$,并且$xw^i, yw^j, zw^p \in St, 0 \leqslant i < m, 0 \leqslant p < k, 0 \leqslant j < \max\{n,l\}$．设$n > l$,则有$xw^m = yw^n = yw^lw^{n-l} = zw^{k+n-l}$．当$0 \leqslant j < k$时，$zw^j \in St$；当$k \leqslant j < k+n-l$时，$zw^j = zw^kw^{j-k} = yw^lw^{j-k} = yw^{l+j-k} \in St$．设$n < l$，则可类似于上述证明．设$n = l$，此时$xw^m = zw^k$．这就证明了关系$\theta$是$S$上的等价关系．

显然θ还是S上的左同余．因为$tw \cdot 1 = t \cdot w$，所以令$m = 0, n = 1$，则$t \cdot w^0 = t \in St$．因此有$tw\theta t$．所以$\lambda \subseteq \theta$．

反过来,设$x\theta y$．则存在$m,n \geqslant 0$，使得$xw^m = yw^n$，并且$xw^i, yw^j \in St, 0 \leqslant i < m, 0 \leqslant j < n$．记$xw^i = u_it, yw^j = v_jt$，其中$u_i, v_j \in S, 0 \leqslant i < m, 0 \leqslant j < n$，则有：

$$\begin{aligned}
&x = u_0t,\\
&u_0(tw) = xw = u_1t,\\
&u_1(tw) = xw^2 = u_2t,\\
&\qquad\qquad \cdots\cdots\\
&u_{m-1}(tw) = xw^m = yw^n = v_{n-1}(tw),\\
&v_{n-1}t = yw^{n-1} = yw^{n-2}w = v_{n-2}(tw),\\
&\qquad\qquad \cdots\cdots\\
&v_2t = yw^2 = yww = v_1(tw),\\
&v_1t = yw = v_0(tw),\\
&v_0t = y,
\end{aligned}$$

所以$x\lambda y$．这说明$\theta \subseteq \lambda$．因此$\lambda = \theta$．结论随之得证．　□

引理 5.6.2 设$e \in E(S)$，ρ是S上的右同余，$w \in S, \lambda = \lambda(ew,e)$．如果存在自然数$m,n(m < n)$和$z \in S$，使得$zw^i\rho zw^ie, m \leqslant i < n$,那么,对任意$y \in S$，如果$y\rho zw^m$,则$1(\lambda \vee \rho y)w^{n-m}$,这里$\rho y$的定义为：$u(\rho y)v \Leftrightarrow yu\rho yv$.

证明　因为$y\rho zw^m\rho zw^me\rho ye$，所以有$1(\rho y)e$.显然$ew\lambda e$．又因为$yew\rho yw$，所以$ew(\rho y)w$．因此有$1(\lambda \vee \rho y)w$.

若$n-m=1$, 则结论已证毕.

设$n-m \geqslant 2$. 此时有$yw\rho zw^{m+1}\rho zw^{m+1}e\rho ywe$, 所以$w(\rho y)we\lambda wew(\rho y)w^2$. 结合第一段证明的结果即得$1(\lambda \vee \rho y)w^2$.

若$n-m=2$, 则结论已证毕. 若$n-m>2$, 则继续使用上述的证明方法即可证明本引理. □

引理 5.6.3 设λ, ρ是S上的左、右同余, $x,y,z \in S$. 若$1(\lambda \vee \rho(yx))z$, 则$x(\lambda \vee \rho y)xz$.

证明 设$s_0, s_1, \cdots, s_n \in S$, 使得:

$$1\lambda s_0(\rho yx)s_1\lambda s_2 \cdots s_{n-1}\lambda s_n(\rho yx)z,$$

则$yxs_0\rho yxs_1, \cdots, yxs_n\rho yxz$. 所以有

$$x\lambda xs_0(\rho y)xs_1\lambda xs_2 \cdots xs_{n-1}\lambda xs_n(\rho y)xz,$$

即$x(\lambda \vee \rho y)xz$. □

下面的命题给出了平坦循环S -系的许多例子.

命题 5.6.4 设S是幺半群, $w \in S, e \in E(S)$, $\lambda = \lambda(ew, e)$, 则S -系S/λ是平坦的.

证明 设ρ是S上的任意右同余, $u, v \in S$, 并且$u(\lambda \vee \rho)v$. 要证明存在$x, y \in S$, 使得$ux\rho vy$, 并且$x(\lambda \vee \rho u)1, y(\lambda \vee \rho v)1$, 从而由引理5.5.10知$S/\lambda$是平坦的.

令$\Phi = \lambda \circ \rho$, 则$\lambda \vee \rho = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \Phi^n$. 由$u(\lambda \vee \rho)v$知存在$n$, 使得$u\Phi^n v$. 对$n \geqslant 0$用数学归纳法证明存在$l, r \geqslant 0$, 使得$uw^l\rho vw^r, w^l(\lambda \vee \rho u)1, w^r(\lambda \vee \rho v)1$, 并且

$$uw^i\rho uw^ie, \quad 0 \leqslant i < l,$$
$$vw^j\rho vw^je, \quad 0 \leqslant j < r.$$

设$n=0$. 此时有$u=v$. 可取$l=r=0$.

设对于$n \geqslant 0$上述结论已成立.假定$u\Phi^{n+1}v$, 则存在$x, y \in S$,使得$u\Phi^n x\lambda y\rho v$. 由归纳假定知存在$l, r \geqslant 0$,使得$uw^l\rho xw^r, w^l(\lambda \vee \rho u)1, w^r(\lambda \vee \rho x)1$,并且$uw^i\rho uw^ie$, $0 \leqslant i < l, xw^j\rho xw^je, 0 \leqslant j < r$. 对于$x\lambda y$, 由引理5.6.1知存在$m, p \geqslant 0$, 使得$xw^m = yw^p$, 并且$xw^i, yw^j \in Se, 0 \leqslant i < m, 0 \leqslant j < p$. 考虑下列的三种情形:

(a) $r > m$. 此时有

$$uw^l\rho xw^r = xw^m w^{r-m} = yw^p w^{r-m}\rho vw^{r-m+p}.$$

已知当$0 \leqslant i < l$时, $uw^i\rho uw^ie$, 并且$w^l(\lambda \vee \rho u)1$. 因为$v\rho yw^0, yw^i \in Se(0 \leqslant i < p)$(从而$yw^i = yw^ie$), 所以由引理5.6.2知有$1(\lambda \vee \rho v)w^p$. 又因为$vw^p\rho yw^p =$

xw^m, 而$xw^i\rho xw^ie(m \leqslant i < r)$, 所以由引理5.6.2知$1(\lambda \vee \rho(vw^p))w^{r-m}$. 再由引理5.6.3即知$w^p(\lambda \vee \rho v)w^{r-m+p}$. 合起来即得结论$1(\lambda \vee \rho v)w^{r-m+p}$. 另外, 当$0 \leqslant j < p$时, 已有$vw^j\rho yw^j \in Se$, 从而$vw^j\rho yw^j = yw^je\rho vw^je$. 当$p \leqslant j < r-m+p$时,

$$vw^j = vw^pw^{j-p}\rho yw^pw^{j-p} = xw^mw^{j-p}$$
$$= xw^{j+m-p}\rho xw^{j+m-p}e\rho vw^je.$$

(b) $r = m$. 此时有

$$uw^l\rho xw^r = xw^m = yw^p\rho vw^p,$$

$1(\lambda \vee \rho u)w^l, uw^i\rho uw^ie(0 \leqslant i < l)$; 又$w^p(\lambda \vee \rho u)1$(同(a)的证明). 对任意$0 \leqslant j < p, vw^j\rho yw^j = yw^je\rho vw^je$.

(c) $r < m$. 此时有

$$uw^{l+m-r} = uw^lw^{m-r}\rho xw^rw^{m-r} = xw^m = yw^p\rho vw^p.$$

由上面的证明可知有$1(\lambda \vee \rho v)w^p, vw^i\rho vw^ie(0 \leqslant i < p)$.因为$u\rho uw^0, uw^i\rho uw^ie$ $(0 \leqslant i < l)$, 所以由引理5.6.2知有$1(\lambda \vee \rho u)w^l$. 又因为$uw^l\rho xw^r, xw^i = xw^ie(r \leqslant i < m)$, 所以由引理 5.6.2知有 $1(\lambda \vee \rho(uw^l))w^{m-r}$, 再由引理 5.6.3 知$w^l(\lambda \vee \rho u)w^{m-r+l}$. 所以$1(\lambda \vee \rho u)w^{m-r+l}$. 另外, 若$0 \leqslant j < l$, 则$uw^j\rho uw^je$; 若$l \leqslant j < m-r+l$, 则$0 \leqslant j-l+r < m$, 所以$uw^j = uw^lw^{j-l}\rho xw^rw^{j-l} = xw^{j-l+r} = xw^{j-l+r}e\rho uw^je$.

这就证明了S/λ是平坦S -系. □

推论 5.6.5　设$w \in S$, t是S的正则元, $\lambda = \lambda(tw, t)$, 则S/λ是平坦系.

证明　设$t = tt't$, 令$e = t't \in E(S)$. 对任意左同余θ,有

$$tw\theta t \Leftrightarrow ew\theta e,$$

所以$\lambda(tw, t) = \lambda(ew, e)$. 由命题5.6.4即得结论. □

推论 5.6.6　设所有平坦循环S -系满足条件(P), 则任意$e \in E(S) - \{1\}$都是S的左零元.

证明　设$e \in E(S), e \neq 1, x \in S$. 由命题5.6.4知循环$S$ -系$S/\lambda(exe, e)$是平坦的, 所以满足条件(P). 因为$exe\lambda(exe, e)e$, 所以由命题5.1.1知存在$s, t \in S$, 使得$exes = et$, 并且$s\lambda(exe, e)1\lambda(exe, e)t$.

设$s \neq 1$, 则存在$t_1, \cdots, t_n \in S$, 使得:

$$1 = t_1c_1, t_1d_1 = t_2c_2, \cdots, t_nd_n = s,$$

这里$\{c_i, d_i\} = \{exe, e\}, i = 1, \cdots, n$. 所以$1 \in Se$从而$e = 1$,矛盾. 因此$s = 1$. 同理可证$t = 1$. 所以有$exe = e$.

设$e, f \in E(S) - 1$. 由命题5.6.4知循环S -系$S/\lambda(fe, f)$是平坦的, 从而满足条件(P). 因为$fe\lambda(fe, f)f$, 所以由命题5.1.1知存在$u, v \in S$, 使得$feu = fv$, 并且$u\lambda(fe, f)1, v\lambda(fe, f)1$. 同上述方法类似地可证得若$u \neq 1$, 则必有$1 \in Sf$或者$1 \in Se$, 即$f = 1$或者$e = 1$.矛盾. 因此$u = 1$. 同理可证$v = 1$. 所以$fe = f$.

设$e \in E(S) - \{1\}, x \in S$, 则$ex = exex$, 即$ex \in E(S)$. 又显然$ex \neq 1$. 由已证的结论知有$exe = ex \cdot e = ex$. 又$exe = e$, 所以$ex = e$. 因此$e$是$S$的左零元. □

引理 5.6.7 设λ是S上的左同余, S/λ是弱平坦S -系, e, f是S的左零元并且$e\lambda f$, 则$e = f$.

证明 因为$e\lambda f$, 所以由命题5.2.11知存在$s, t \in S$, 使得$es = ft$, 并且$s(\lambda \vee \Delta e)1(\lambda \vee \Delta f)t$. 由于$e, f$是左零元, 所以$e = f$. □

下面是本节的主要结果.

定理 5.6.8 对于幺半群S, 以下几条是等价的:

(1) 任意弱平坦循环左S -系是投射的;

(2) 任意弱平坦循环左S -系是强平坦的;

(3) 任意平坦循环左S -系是投射的;

(4) 任意平坦循环左S -系是强平坦的;

(5)任意$x \in S, x \neq 1$, 存在自然数n, 使得x^n是S的左零元. 此时称S为左谐零幺半群.

证明 (1)⇒(3)⇒(4)和(1)⇒(2)⇒(4)都是显然的.

(4)⇒(5)由推论5.6.6知任意$e \in E(S) - \{1\}$都是S的左零元. 对于任意$x \in S$, 由定理5.1.5知存在自然数n, 使得$x^{n+1} = x^n$. 所以$x^n \in E(S)$. 若$x^n = 1$, 则x是可逆元, 所以由$x^{n+1} = x^n$即得$x = 1$. 因此, 若$x \neq 1$, 则存在自然数n, 使得x^n是S的左零元.

(5)⇒(2)设λ是S上的左同余, S/λ是弱平坦S -系. 要证明S/λ是强平坦的. 设$u, v \in S$满足$u\lambda v$. 由命题5.2.11知存在$s, t \in S$,使得$us = vt, s(\lambda \vee \Delta u)1, t(\lambda \vee \Delta v)1$. 令$\Phi = \lambda \circ \Delta u, \Psi = \lambda \circ \Delta v$.设$m, n \geqslant 0$是满足$s\Phi^m 1$和$t\Psi^n 1$的最小的非负整数.考虑以下几种情形(要证明存在$w \in S$, 使得$uw = vw$, 并且$w\lambda 1$):

(a) $m = 1$. 此时有$s = 1$, 因此$u = vt$. 如果$n = 0$, 那么$t = 1$, 从而令$w = 1$即有$uw = vw$并且$w\lambda 1$. 设$n > 0$, 则存在$x, y \in S$, 使得$t\Psi^{n-1}x\lambda y(\Delta v)1$. 若$y \neq 1$, 则$vy = v$, 而$y \in S$, 所以存在$l$使得$y^l$是$S$的左零元.显然$v = vy^l$, 所以$v$也是$S$的左零元. 故有$u = vt = v$. 令$w = 1$即可.设$y = 1$. 则$n$的最小性可知$x \neq 1$, 所以存在$l$,使得$x^l$是$S$的左零元, 由$x\lambda y = 1$易得$x^l\lambda 1$, 故$ux^l\lambda u\lambda v\lambda vx^l$.

而ux^l, vx^l都是S的左零元, 所以由引理5.6.7知$ux^l = vx^l$. 令$w = x^l$即可.

(b) $n = 0$. 类似于情形(a)即可完成证明.

(c) $m > 0, n > 0$. 此时存在$x, y, z, r \in S$, 使得:

$$s\Phi^{m-1}x\lambda y(\Delta u)1,$$
$$t\Psi^{n-1}z\lambda r(\Delta v)1.$$

易知$u = uy, v = vr$. 如果$y \neq 1, r \neq 1$, 则存在k, l, 使得y^k, r^l是S的左零元, 所以$u = uy^k, v = vr^l$也是S的左零元, 故从$us = vt$, 即得$u = v$. 令$w = 1$即可. 设$y = 1$, 则由m的最小性知$x \neq 1$. 所以存在k, 使得x^k是左零元. 由于$ux^k\lambda u, vx^k\lambda v, u\lambda v$, 所以$ux^k\lambda vx^k$. 又$ux^k, vx^k$都是左零元, 所以$ux^k = vx^k$. 令$w = x^k$, 则$w\lambda 1, uw = vw$. 如果$r = 1$, 则类似的证明即得结论. 所以由命题5.1.2知S -系S/λ是强平坦的.

(2)⇒(1) 设$\lambda = \Delta$, 则$S/\lambda \simeq S$是投射S -系. 设S/λ是弱平坦的, 并且$\lambda \neq \Delta$. 由条件知S/λ是强平坦的. 设$u, v \in S, u \neq v$但$u\lambda v$. 由S/λ的强平坦性知存在$s \in S$, 使得$us = vs$, 并且$s\lambda 1$. 显然$s \neq 1$. 由(2)⇒(4⇒)(5)知存在k, 使得s^k是S的左零元. 显然$us^k = vs^k, s^k\lambda 1$. 对于不同的$u, v \in S, u \neq v, u\lambda v$, 可以得到不同的$s^k$, 但这些$s^k$都在1所在的$\lambda$-类中, 从而由引理5.6.7知这些$s^k$都是相等的. 令$e = s^k$, 则$ue = ve$, 并且$e\lambda 1$. 令$f : S/\lambda \to Se$如下:

$$f(s\lambda) = se, \quad \forall\ s \in S.$$

若$u\lambda v$, 而$u \neq v$, 则由上面的讨论知$ue = ve$, 即$f(u\lambda) = f(v\lambda)$. 这说明$f$是有定义的. 显然$f$是$S$ -同态. 若$ue = ve$, 则$u\lambda ue = ve\lambda v$. 所以$f$还是同构. 因此$S/\lambda \simeq Se$是投射的. □

定理 5.6.9 设幺半群S的任意两个主右理想有非空的交, 则如下两条是等价的:

(1) 所有循环平坦S -系是强平坦的;

(2) $S = \{1\}$, 或$S = N^1$, 这里N是诣零半群.

证明 (1)⇒(2) 设所有循环平坦S -系是强平坦的. 则由定理5.6.8知对于任意$x \in S, x \neq 1$, 存在n, 使得x^n是S的左零元. 设$S \neq \{1\}$, 则S中肯定有一个左零元e. 设$x \in S - \{1\}$, 则有$\{x^n\} = x^nS$. 又$\{e\} = eS$, 而$x^nS \cap eS \neq \varnothing$, 所以$x^n = e$, 从而$xe = xx^n = x^nx = x^n = e$, 即$e$是$S$中的零元. 所以$S = N^1$, N是诣零半群.

(2)⇒(1) 由定理5.6.8即得结论. □

利用本节前面得到的结论, 很容易证明下述定理中的(1)⇒(6) (设S是右PP幺半群并且所有循环平坦S -系满足条件(P), $x \in S$, 则存在$e \in E(S)$, 使得$xe = x$,

并且对任意$s,t \in S$, 若$xs = xt$, 则$es = et$. 如果$e = 1$, 则x是左可消元. 如果$e \neq 1$, 则由推论5.6.6知e是S的左零元, 所以$x = xe$也是S的左零元). 这里使用另外的方法证明得更多一些.下述定理是对定理5.5.9的推广,其证明方法部分来自于文献[46],部分来自于文献[185].

定理 5.6.10 对于幺半群S,以下几条是等价的:

(1) S是右PP的, 并且任意循环平坦S -系满足条件(P);

(2) S是右PP的, 并且任意循环弱平坦S -系满足条件(P);

(3) S是右PSF的, 并且任意循环平坦S -系满足条件(P);

(4) S是右PSF的, 并且任意循环弱平坦S -系满足条件(P);

(5) S中的所有元都是左半可消元, 并且对于S的任意真左理想I, 或存在$a \in I - aI$, 或I中的所有元皆为左零元;

(6) 任意$x \in S$, x是左零元或左可消元.

证明 (2)⇒(1)⇒(3)和(2)⇒(4)⇒(3)都是显然的.

(3)⇒(6)设$x \in S$, x不是左可消元. 则存在$c, d \in S$, 使得$xc = xd$但$c \neq d$. 因为S是右PSF幺半群, 所以由定理4.4.13知x是S的左半可消元. 因此存在$x_1 \in S$, 使得$x_1c = x_1d, x = xx_1, x_1$也是左半可消元, 所以由$x_1c = x_1d$知存在$x_2 \in S$, 使得$x_2c = x_2d, x_1 = x_1x_2$. 继续上述过程可知存在$x_1, x_2, \cdots \in S$, 使得:

$$x_ic = x_id, \quad x_i = x_ix_{i+1}, \quad i = 1, 2, \cdots .$$

利用数学归纳法容易证明

$$xx_i = x, \quad i = 1, 2, \cdots .$$

令

$$H = \{(x_ix, x_i) | i = 1, 2, \cdots\}.$$

记$\lambda = \lambda(H)$为由H生成的S的最小左同余. 下面证明左S -系S/λ是平坦的.

设ρ是S的任意右同余, $u, v \in S$, 并且$u(\lambda \vee \rho)v$. 只需找到$s, t \in S$, 使得$us\rho vt, s(\lambda \vee \rho u)1, t(\lambda \vee \rho v)1$即可.

若$u = v$, 则取$s = t = 1$即可. 设$u \neq v$, 则存在$u_0, v_0, u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n \in S$, 使得:

$$u = u_0\lambda v_0\rho u_1\lambda v_1 \cdots \rho u_n\lambda v_n\rho u_{n+1} = v.$$

如果$u_0 = v_0, u_1 = v_1, \cdots, u_n = v_n$, 则$u\rho v$, 所以取$s = t = 1$即可. 设$j$和$k$满足$u_0 = v_0, \cdots, u_{j-1} = v_{j-1}$, 但$u_j \neq v_j, u_k \neq v_k, u_{k+1} = v_{k+1}, \cdots, u_n = v_n$. 则

有:

$$u = u_0 = v_0 \rho u_1 = v_1 \rho \cdots \rho u_{j-1} = v_{j-1} \rho u_j,$$
$$v_k \rho u_{k+1} = v_{k+1} \rho \cdots \rho u_n = v_n \rho u_{n+1} = v.$$

对于任意$i \in \{j, \cdots, k\}$, 若$u_i \neq v_i$, 则存在$t_{i1}, \cdots, t_{im_i} \in S$, 使得:

$$u_i = t_{i1} c_{i1}, t_{i1} d_{i1} = t_{i2} c_{i2}, \cdots, t_{im_i} d_{im_i} = v_i,$$

其中$(c_{i1}, d_{i1}), \cdots, (c_{im_i}, d_{im_i}) \in H \cup H^{-1}$. 设$\{c_{i1}, d_{i1}\} = \{x_{p_i} x, x_{p_i}\}$, $\{c_{im_i}, d_{im_i}\} = \{x_{q_i} x, x_{q_i}\}$. 记$r_i$=max$\{p_i, q_i\}$. 若$c_{i1} = x_{p_i} x$, 则$u_i x_{r_i+1} = t_{i1} c_{i1} x_{r_i+1} = t_{i1} x_{p_i} (x x_{r_i+1}) = t_{i1} x_{p_i} x = t_{i1} c_{i1} = u_i$. 若$c_{i1} = x_{p_i}$, 则$u_i x_{r_i+1} = t_{i1} c_{i1} x_{r_i+1} = t_{i1} x_{p_i} x_{r_i+1} = t_{i1} x_{p_i} = t_{i1} c_{i1} = u_i$. 总之有$u_i x_{r_i+1} = u_i$. 同理$v_i x_{r_i+1} = v_i$. 令$r =max\{r_i + 1 | j \leqslant i \leqslant k, u_i \neq v_i\}$, 则容易证明对任意$u_i \neq v_i$, 有

$$u_i x_r = u_i, \quad v_i x_r = v_i.$$

继续设$u_i \neq v_i$, $i \in \{j, \cdots, k\}$. 同上记号, 若 $c_{i1} = x_{p_i} x$, 则 $u_i x = t_{i1} c_{i1} x = t_{i1} x_{p_i} x x = t_{i1} x_{p_i} x^2 = t_{i1} d_{i1} x^2 = t_{i2} c_{i2} x^2$. 若 $c_{i1} = x_{p_i}$, 则$u_i x^2 = t_{i1} c_{i1} x^2 = t_{i1} x_{p_i} x^2 = t_{i1} d_{i1} x = t_{i2} c_{i2} x$. 用数学归纳法容易证明存在自然数$\alpha_i, \beta_i$, 使得$u_i x^{\alpha_i} = v_i x^{\beta_i}$.显然若$u_i = v_i$, 则上述$\alpha_i, \beta_i$仍存在. 令$\alpha = \sum\limits_{i=j}^{k} \alpha_i, \beta = \sum\limits_{i=j}^{k} \beta_i$,则有

$$\begin{aligned} u x_r x^\alpha \rho u_j x_r x^\alpha &= u_j x^\alpha = u_j x^{\alpha_j} x^{\alpha - \alpha_j} \\ &= v_j x^{\beta_j} x^{\alpha - \alpha_j} = \cdots = v_k x^\beta \\ &= v_k x_r x^\beta \rho v x_r x^\beta. \end{aligned}$$

所以若令$s = x_r x^\alpha, t = x_r x^\beta$, 则$u s \rho v t$. 又因为$x_r \lambda x_r x$, 所以$x_r x^2 = x_r x x = x_r (x x_r) x = (x_r x)(x_r x) \lambda x_r x x_r = x_r x \lambda x_r$. 类似地可以证明$x_r x^\alpha \lambda x_r$, 即$s \lambda x_r$. 而$u x_r \rho u_j x_r = u_j \rho u$, 所以$x_r (\rho u) 1$, 从而$s (\lambda \vee \rho u) 1$. 同理可证$t (\lambda \vee \rho v) 1$. 因此$S/\lambda$是平坦的.

由条件即知S/λ满足条件(P). 所以由命题5.1.1知存在$s, t \in S$, 使得$x_1 x s = x_1 t$, 并且$s \lambda 1 \lambda t$. 设$s \neq 1$. 由于$s \lambda 1$, 所以存在$t_1, \cdots, t_n \in S$, 使得:

$$s = t_1 c_1, t_1 d_1 = t_2 c_2, \cdots, t_n d_n = 1,$$

其中$(c_i, d_i) \in H \cup H^{-1}, i = 1, \cdots, n$. 若$d_n = x_i x$, 则$x_{i+1} = 1 \cdot x_{i+1} = t_n d_n x_{i+1} = t_n x_i x x_{i+1} = t_n x_i x = t_n d_n = 1$, 所以$c = d$, 矛盾. 若$d_n = x_i$,

则$x_{i+1} = t_n d_n x_{i+1} = t_n x_i x_{i+1} = t_n x_i = t_n d_n = 1$, 又得到$c = d$,矛盾. 因此$s = 1$. 同理可证$t = 1$. 所以有$x_1 x = x_1$. 因此,

$$x = xx_1 = xx_1x,$$

即x是正则元, 所以x_1x是幂等元. 若$x_1x = 1$, 则由$xc = xd$即得$c = d$, 矛盾. 所以$x_1 x \neq 1$. 由推论5.6.6知x_1x是S的左零元, 所以$x = xx_1x$是左零元.

(6)⇒(5)设$u, s, t \in S$, 满足$us = ut$. 若u是S的左可消元, 则$s = t$. 若u是S的左零元, 则$us = ut$, $uu = u$.所以u是S的左半可消元.

设I是S的任意真左理想. 若$a \in I$不是S的左零元, 则a必是S的左可消元. 如果$a \in aI$, 那么$1 \in I$, 矛盾. 所以$a \in I - aI$.

(5)⇒(4)因为S中的所有元都是左半可消元, 所以由定理4.4.13知S是右PSF幺半群. 设λ是S上的左同余, S/λ是弱平坦S -系, $b, b' \in S/\lambda, x, y \in S$, 满足$xb = yb'$. 要找$s, t \in S, b'' \in S/\lambda$, 使得$xs = yt$, 并且$b = sb'', b' = tb''$.

因为S/λ是弱平坦的, 所以由定理4.5.5知存在$x_1, y_1, u, v \in S, b_1'' \in S/\lambda$, 使得

$$x = xu, \qquad ub = x_1 b_1'',$$
$$y = yv, \qquad vb' = y_1 b_1'',$$
$$xx_1 = yy_1.$$

考虑如下四种情形:

(i) x, y都是左零元. 设$b = s_1\bar{1}, b' = t_1\bar{1}$. 令$b'' = 1, s = s_1, t = t_1$, 则$xs = x = xx_1 = yy_1 = y = yt$, 并且$b = sb'', b' = tb''$.

(ii) x不是左零元, y是左零元. 此时由$xx_1 = yy_1$得$y = xx_1$.

在张量积$S \otimes S/\lambda$中, $x \otimes b = 1 \otimes xb = 1 \otimes yb' = y \otimes b' = xx_1 \otimes b' = x \otimes x_1b'$. 由于$S/\lambda$是弱平坦的, 所以在$xS \otimes S/\lambda$中有$x \otimes b = x \otimes x_1 b'$. 故存在$b_1, \cdots, b_n \in S/\lambda, s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$, 使得:

$$\begin{aligned} & & b &= s_1 b_1, \\ xs_1 &= xt_1, & t_1 b_1 &= s_2 b_2, \\ xs_2 &= xt_3, & t_2 b_2 &= s_3 b_3, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ xs_n &= xt_n, & t_n b_n &= x_1 b'. \end{aligned}$$

因为x是左半可消元, 所以由$xs_1 = xt_1$知存在$r_1 \in S$, 使得$r_1 s_1 = r_1 t_1, xr_1 = x$. 因此$xr_1 s_2 = xr_1 t_2$. 再利用$x$的左半可消性得知存在$r_2 \in S$, 使得$r_2 r_1 s_2 =$

$r_2r_1t_2, xr_2 = x$. 所以$r_2r_1s_1 = r_2r_1t_1, r_2r_1s_2 = r_2r_1t_2, xr_2r_1 = xr_1 = x$.类似的讨论可以证明存在$u_1 \in S$, 使得:

$$x = xu_1, \quad u_1s_i = u_1t_i, \quad i = 1, \cdots, n.$$

因为u_1也是左半可消元, 所以同上类似的证明可知存在$u_2 \in S$, 使得$u_1u_2 = u_1, u_2s_i = u_2t_i, i = 1, \cdots, n$. 继续上述过程可知存在$S$中的元素$u_1, u_2, \cdots$, 使得:

$$u_ju_{j+1} = u_j, \quad u_js_i = u_jt_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad j = 1, \cdots.$$

令$I = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} Su_j$, 则$I$是$S$的左理想. 对任意$a \in I$, 存在$y' \in S$, 使得$a = y'u_j$. 所以$a = y'u_j = y'u_ju_{j+1} = au_{j+1}$. 因此由条件(5)知$I$中的元素皆为左零元, 或$I = S$. 若是前者, 则$u_1 \in I$是左零元, 所以$x = xu_1$也是左零元, 和$x$不是左零元的假设条件矛盾. 因此必有$I = S$. 故存在$j$和$z \in S$, 使得$1 = zu_j$,从而有

$$u_{j+1} = 1 \cdot u_{j+1} = zu_ju_{j+1} = zu_j = 1.$$

故有

$$s_i = t_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

所以

$$b = s_1b_1 = t_1b_1 = s_2b_2 = \cdots = s_nb_n = t_nb_n = x_1b'.$$

令$b'' = b', s = x_1, t = 1$, 则$b = sb'', b' = tb'', xs = xx_1 = y = yt$.

(iii) x是左零元, y不是左零元. 类似于(ii).

(iv) x, y都不是左零元. S中没有左零元时也属于此种情形.

因为x是左半可消元, 所以由$xu = x$知存在$x_1 \in S$, 使得$x_1u = x, xx_1 = x$. 同理存在$x_2 \in S$, 使得$x_2u = x_2, x_1x_2 = x_1$. 继续下去可找到$x_1, x_2, \cdots \in S$, 使得:

$$x_iu = x_i, \quad x_ix_{i+1} = x_i, \quad i = 1, \cdots,$$

类似于上面的证明即可知$u = 1$. 同理可证$v = 1$. 所以$b = x_1b_1'', b' = y_1b_1'', xx_1 = yy_1$.

这即证明了S/λ满足条件(P).

(4)⇒(2)设S是右PSF的, 并且任意循环弱平坦S -系满足条件(P). 则由(4)⇒(3)⇒(6)可知S中的任意元, x是左零元或左可消元.由此即知S是右PP幺半群. □

容易看出, 定理5.5.9是定理5.6.10的直接推论. 除此以外还有

推论 5.6.11　对于幺半群S, 以下几条是等价的:

(1) 任意$x \in S$, 若$x \neq 1$, 则x是S的左零元(即$S = N^1$, 其中N是左零半群);

(2) S是右PSF(或右PP)的, 并且任意循环平坦左S -系是强平坦的;

(3) S是右PSF(或右PP)的, 并且任意循环弱平坦左S -系是强平坦的.

证明 由定理5.1.5知任意循环的满足条件(P)的S -系是强平坦的当且仅当对任意$x \in S$, 存在自然数n, 使得$x^{n+1} = x^n$. 所以由定理5.6.10即得本推论. □

定义 5.6.12 设S是幺半群, $x \in S$, 称x是S中的链元, 如果存在$x_1, x_2, \cdots, \in S$, 使得

$$xx_1 = x, \quad x_i x_{i+1} = x_i, \quad x_i \neq 1, \quad i = 1, 2, \cdots.$$

设$e \in E(S) - \{1\}$, 则显然e是S的链元, 反之,链元可以不是幂等元. 例如,设

$$S = \langle x_0, x_1, x_2, \cdots | x_i x_{i+1} = x_{i+1} x_i = x_i, i = 0, 1, \cdots \rangle \cup \{1\},$$

则$x_0, x_1, x_2, \cdots$都是S中的链元, 但$E(S) = \{1\}$. 所以链元是幂等元的真推广.

下面的推论是对推论5.6.6的推广.

推论 5.6.13 设任意循环平坦S -系满足条件(P), 则S中的链元皆为S的左零元.

证明 由定理5.6.10的证明即得. □

考虑如下三个条件:

(1) 所有循环平坦S -系满足条件(P).

(2) S的所有链元都是左零元.

(3) S的所有不等于1的幂等元是左零元.

则有(1)⇒(2)⇒(3). 但其逆都不成立. 可见以下两例:

例 5.6.14 令$S = \langle x_0, x_1, x_2, \cdots | x_i x_{i+1} = x_{i+1} x_i = x_i, i = 0, 1, \cdots \rangle \cup \{1\}$, 则$S$满足条件(3). 因为$x_1 x_0 \neq x_1$, 所以$x_1$不是左零元. 但$x_1$是链元, 所以$S$不满足条件(2).

例 5.6.15 令$S = \langle x, y | xy = x^2 = yx \rangle \cup \{1\}$, $\lambda = \lambda(x, x^2) \vee \lambda(1, y^2)$. 则由例5.2.12知$S/\lambda$是平坦$S$ -系, 但不满足条件(P). 容易证明对于$a, b \in S, a = ab \Leftrightarrow b = 1$. 所以$S$中没有链元.

由定理5.2.9知若S是右PP幺半群, 则任意平坦S -系满足条件(P)当且仅当S是左可消幺半群. 由定理5.6.10又知若S是右PP(或右PSF)幺半群, 则任意平坦循环S -系满足条件(P)当且仅当任意$x \in S, x$是左零元或左可消元. 下面给出一个例子说明定理5.2.9和定理5.6.10中的条件“ S是右PP幺半群或右PSF幺半群”不能去掉. 这个例子同时也说明, 离完全刻画所有平坦系满足条件(P)(或所有平坦循环系满足条件(P))的幺半群还很远.

例 5.6.16 设$S = \langle x, y | xy = x^2, yx = y_2 \rangle \cup \{1\}$, 则显然有$x^m y^n = x^{m+n}, y^n x^m = y^{n+m}$. 容易看出$E(S) = \{1\}$, 并且$S$中的任意元素$a$, 若$a \neq 1$, 则$a$不是左可消元. 所以$S$不是右PP幺半群,下面将要证明任意弱平坦$S$ -系都满足条件(P), 所以由定理5.6.10可知S也不是右PSF幺半群. 注意到S还是右可消幺半群.

设A是弱平坦S -系, 证明A满足条件(P). 设$a, a' \in A, s, t \in S$满足$sa = ta'$.下证存在$u, v \in S, a'' \in A$, 使得$su = tv, a = ua'', a' = va''$. 若$s = 1$, 则令$u = t, v = 1, a'' = a'$即可. 若$t = 1$, 则令$u = 1, v = s, a'' = a$即可. 设$s \in \langle x \rangle, t \in \langle y \rangle$, 则有$xa_1 = ya'_1$, 这里$a_1, a'_1 \in A$. 因此在$S \otimes A$中有$x \otimes a_1 = y \otimes a'_1$. 由于$A$是弱平坦的, 所以在$(xS \cup yS) \otimes S$中也有$x \otimes a_1 = y \otimes a'_1$. 故存在$s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S, b_1, \cdots, b_n \in A$, 使得:

$$
\begin{aligned}
& & a_1 &= s_1 b_1, \\
xs_1 &= z_2 t_1, & t_1 b_1 &= s_2 b_2, \\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\
z_n s_n &= y t_n, & t_n b_n &= a'_1.
\end{aligned}
$$

其中$z_i \in \{x, y\}, i = 2, \cdots, n$. 所以存在$i$, 使得$z_i = x, z_{i+1} = y$, 因此$z_i s_i = z_{i+1} t_i \in xS \cap yS$. 这与$xS \cap yS = \varnothing$矛盾. 同理, 若$s \in \langle y \rangle, t \in \langle x \rangle$, 则同样得出矛盾. 所以有$s, t \in \langle x \rangle$, 或者$s, t \in \langle y \rangle$.

不失一般性,设$s, t \in \langle x \rangle$. 则有$x^k a = x^l a'$. 不妨假定$1 \leqslant k \leqslant l$. 所以在$S \otimes A$中有$x^k \otimes a = x^l \otimes a'$. 由于$A$是弱平坦的, 所以在$x^k S \otimes A$中有$x^k \otimes a = x^l \otimes a'$. 故存在$a_i \in A, s_i, t_i \in S, k_i \geqslant k$, 使得:

$$
\begin{aligned}
& & a &= x_1^{p_1} a_1, \\
x^k x_1^{p_1} &= x^{k_2} x_2^{m_2}, & x_2^{m_2} a_1 &= x_3^{p_2} a_2, \\
x^{k_2} x_3^{p_2} &= x^{k_3} t_2, & t_2 a_2 &= s_3 a_3, \\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\
x^{k_n} s_n &= x^l t_n, & t_n a_n &= a'.
\end{aligned}
$$

这里$p_i, m_i \geqslant 0, x_1, x_2, x_3 \in \{x, y\}$. 若$n = 1$, 则结论成立. 设$n > 1$. 因为$x_2^{m_2} a_1 = x_3^{p_2} a_2$, 所以和前一段的证明类似地可知$x_2 = x_3$.

设$p_1=0$, 则由$x^kx_1^{p_1}=x^{k_2}x_2^{m_2}$以及$k_2\geqslant k$知$m_2=0$. 所以前述等式组的长度可以减小, 从而可以利用归纳假定. 因此可设$p_1>0$. 设$m_2=0$. 则有

$$\begin{aligned} & & a &= x_1^{p_1}x_3^{p_2}a_2,\\ x^kx_1^{p_1}x_3^{p_2} &= x^{k_3}t_2, & t_2a_2 &= s_3a_3,\\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots\\ x^{k_n}s_n &= x^lt_n, & t_na_n &= a'. \end{aligned}$$

所以等式组的长度也可减小.若$p_2=0$, 则有相同的结论. 所以设$m_2,p_2>0$.

设$x_2=x_3=x$, 则有$x^{m_2}a_1=x^{p_2}a_2$. 由此可以得出$y^{m_2}a_1=y^{p_2}a_2$. 事实上, 由$x^{m_2}a_1=x^{p_2}a_2$及A的弱平坦性可知存在$s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n\in S,q_2,\cdots q_n\geqslant \min\{m_2,p_2\}$, 使得:

$$\begin{aligned} & & a_1 &= s_1c_1,\\ x^{m_2}s_1 &= x^{q_2}t_1, & t_1c_1 &= s_2c_2,\\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots\\ x^{q_n}s_n &= x^{p_2}t_n, & t_nc_n &= a_2. \end{aligned}$$

其中$c_1,\cdots,c_n\in A$. 由此容易得到$y^{m_2}s_1=y^{q_2}t_1,\cdots,y^{q_n}s_n=y^{p_2}t_n$. 所以在$S\otimes A$中有$y^{m_2}\otimes a_1=y^{p_2}\otimes a_2$, 因此$y^{m_2}a_1=y^{p_2}a_2$. 同理若$x_2=x_3=y$, 则有$y^{m_2}a_1=y^{p_2}a_2$, 从而$x^{m_2}a_1=x^{p_2}a_2$.

因此从$x_2^{m_2}a_1=x_2^{p_2}a_2$可得$x_1^{m_2}a_1=x_1^{p_2}a_2$. 又$x_1^kx_1^{p_1}=x_1^{k_2}x_1^{m_2}$(因为$k+p_1=k_2+m_2$), 所以有

$$\begin{aligned} a &= x_1^{p_1}a_1=x_1^{k_2+m_2-k}a_1=x_1^{k_2-k}x_1^{m_2}a_1\\ &= x_1^{k_2-k}x_1^{p_2}a_2=x_1^{p_2+k_2-k}a_2,\\ x^kx_1^{p_2+k_2-k} &= x^{p_2+k_2}=x^{k_2}x_3^{p_2}=x^{k_3}t_2. \end{aligned}$$

因此有:

$$\begin{aligned} & & a &= x_1^{p_2+k_2-k}a_2,\\ x^kx_1^{p_2+k_2-k} &= x^{k_3}t_2, & t_2a_2 &= s_3a_3,\\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots\\ x^{k_n}s_n &= x^lt_n, & t_na_n &= a'. \end{aligned}$$

即等式组的长度又可减小,所以由数学归纳法即可完成证明.

§5.7 周期幺半群

如何给出所有循环平坦S -系都满足条件(P)的幺半群的“元素-理想”刻画,至今仍是一个未解决的问题. §5.5和§5.6给出了上述问题的部分答案, 例如,当S是右PP或右PSF幺半群时.本节对于周期幺半群S, 给出上述问题的答案.

半群S称为周期半群, 如果S中的元素具有有限阶, 即任意$a \in S$, $\langle a\rangle$是S的有限子半群,有限半群显然是周期半群.

定理 5.7.1 设S是周期幺半群,则以下条件是等价的:

(1) 所有循环平坦S -系满足条件(P);

(2) 所有循环弱平坦S -系满足条件(P);

(3) $S = G \dot{\cup} N$, 这里G是群, $N = \emptyset$, 或N中的任意元素都是S中的左谐零元.

证明 (1)⇒(3)设$1 \neq x \in S$, 假定对任意自然数n, $x^n \neq 1$. 因为S是周期的, 所以$\langle x\rangle$中有幂等元, 设其为x^k. 又$x^k \neq 1$, 所以由推论5.6.6知x^k是S的左零元.

设$G = \{x \in S |$存在自然数n使得$x^n = 1\}$.对任意$x, y \in G$,下证$xy \in G$. 若不然, 则由前面的证明可知存在k, 使得$(xy)^k$是S的左零元. 显然$x \neq 1, y \neq 1$. 所以存在$n > 1, m > 1$,使得$x^n = 1, y^m = 1$. 为了方便, 记$(xy)^0 = 1$. 则有

$$(xy)^{k-1} = 1 \cdot (xy)^{k-1} = y^{m-1}x^{n-1}xy(xy)^{k-1} = y^{m-1}x^{n-1}(xy)^k,$$

所以$(xy)^{k-1}$也是S的左零元. 显然上述过程可以继续下去. 所以矛盾. 因此必有$xy \in G$, 即G是S的子半群. 显然G还是S的子群.

令$N = S - G$, 则$S = G \dot{\cup} N$, 这里$N = \emptyset$, 或N中的所有元素皆为S中的左谐零元.

(3)⇒(2)设λ是S上的左同余, S/λ是弱平坦S -系. 要证明S/λ满足条件(P). 为此, 设$x, y \in S$, 使得$x\lambda y$.

设$x \in G, y \in N$, 由命题5.2.11知存在$s, t \in S$, 使得$xs = yt$, 并且$s(\lambda \vee \Delta x)1$, $t(\lambda \vee \Delta y)1$. 因为$x \in G$, 所以存在$x' \in S$, 使得$x'x = 1$, 因此$u(\Delta x)v$当且仅当$u = v$. 故有$s\lambda 1$. 又由于$y \in N$, 所以$xs = yt \in N$, 从而$s \in N$. 所以存在自然数$n$, 使得$s^n$是$S$的左零元. 显然$s^n\lambda 1$. 设$u, v \in S$, 使得$u\lambda v$, 则$us^n\lambda u\lambda v\lambda vs^n$. 又$us^n, vs^n$都是$S$中的左零元, 所以由引理5.6.7知$us^n = vs^n$. 这说明映射$f$: $S/\lambda \to Ss^n$:

$$f(\overline{u}) = us^n, \quad (\forall\, \overline{u} \in S/\lambda)$$

是有定义的.显然f还是S -满同态.设$us^n = vs^n$, 则有$u\lambda us^n = vs^n\lambda v$, 即$\overline{u} = \overline{v}$. 所以$f$还是单的, 从而$S/\lambda \simeq Ss^n$是投射$S$ -系, 所以满足条件(P).

因此下面假设满足$x\lambda y$的$x \in G$和$y \in N$不存在.

因为S/λ是弱平坦S -系, 所以对于$x\lambda y$, 存在$s, t \in S$, 使得$xs = yt, s(\lambda \vee \Delta x)1, t(\lambda \vee \Delta y)1$. 考虑如下两种情形:

(i)$x, y \in G$. 此时有$s\lambda 1\lambda t$, 并且$xs = yt$;

(ii) $x, y \in N$. 下证存在$u \in S$, 使得$xu = xs$并且$u\lambda 1$.

由$s(\lambda \vee \Delta x)1$可知存在$s_1, \cdots, s_{2n-1} \in S$, 使得

$$s = s_0\lambda s_1(\Delta x)s_2 \cdots s_{2i}\lambda s_{2i+1}(\Delta x)s_{2i+2} \cdots s_{2n-1}(\Delta x)s_{2n} = 1.$$

设$s_0, s_1, \cdots, s_{2n-1}$中有某个元素在$N$中. 因为$1 \in G$, 所以存在$j$, 使得$s_j \in N, s_{j+1} \in G$, 并且$s_j(\Delta x)s_{j+1}$. 因此$xs_j = xs_{j+1}$, 故$x = xs_js_{j+1}^{-1}$. 因为$s_js_{j+1}^{-1} \in N$, 所以存在$n$, 使得$(s_js_{j+1}^{-1})^n$是$S$的左零元, 从而$x = x(s_js_{j+1}^{-1})^n$也是$S$的左零元. 所以此时可令$u = 1$.

设 $s_0, s_1, \cdots, s_{2n-1} \in G$. 令 $u = s_{2n-1}^{-1}s_{2n-2}s_{2n-3}^{-1}s_{2n-4}\cdots s_1^{-1}s_0$, 因为$s_{2i-1}(\Delta x)s_{2i}$, 所以$xs_{2i-1} = xs_{2i}$, 故$x = xs_{2i}s_{2i-1}^{-1}$. 因此,

$$\begin{aligned} xu &= xs_{2n-1}^{-1}s_{2n-2}\cdots s_2s_1^{-1}s_0 = xs_{2n}s_{2n-1}^{-1}s_{2n-2}\cdots s_2s_1^{-1}s_0 \\ &= xs_{2n-2}s_{2n-3}^{-1}\cdots s_2s_1^{-1}s_0 = \cdots = xs_2s_1^{-1}s_0 = xs_0 = xs. \end{aligned}$$

又因为$s_{2i}\lambda s_{2i+1}$, 所以$s_{2i+1}^{-1}s_{2i}\lambda 1$, 因此,

$$u = s_{2n-1}^{-1}s_{2n-2}\cdots s_1^{-1}s_0\lambda s_{2n-1}^{-1}s_{2n-2}\cdots s_3^{-1}s_2\lambda\cdots\lambda s_{2n-1}^{-1}s_{2n-2}\lambda 1.$$

同理可以证明存在$v \in S$, 使得$yv = yt$并且$v\lambda 1$. 所以$xu = yv$并且$u\lambda 1\lambda v$. 故S/λ满足条件(P).

(2)⇒(1)显然. □

对于非周期幺半群, 定理5.7.1不再成立. 这可由下例说明. 事实上, 下例说明的内容更多: 当所有弱平坦S -系满足条件(P)时, S中可以有既非可消又非左谐零的元素.

例 5.7.2 设$S = \langle x, y | xy = y = yx\rangle \cup \{1\}$, 则$S$是交换幺半群, 幂等元只有一个:1.

容易证明$S = \{x^m | m = 1, 2, \cdots\} \cup \{y^n | n = 1, 2, \cdots\} \cup \{1\}$, 并且$x^my^n = y^nx^m$. 显然$\langle y\rangle$中的任意元素都不是左可消元, 并且不是左谐零元.

设A是弱平坦S -系, $a, a' \in A$, $s, t \in S$, 满足$sa = ta'$. 要证明存在$u, v \in S, a'' \in A$, 使得$su = tv, a = ua'', a' = va''$. 如果$s = 1$, 则$a = ta', a' = 1 \cdot a', st = t \cdot 1$. 同理若$t = 1$, 则结论也成立. 因此下设$s \neq 1, t \neq 1$.

因为S是弱平坦的, 所以有

$$\begin{array}{ll} & a = s_1a_1, \\ ss_1 = z_2t_1, & t_1a_1 = s_2a_2, \\ z_2s_2 = z_3t_2, & t_2a_2 = s_3a_3, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ z_ns_n = tt_n, & t_na_n = a'. \end{array}$$

这里$s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S, a_1, \cdots, a_n \in A, z_2, \cdots, z_n \in \{s, t\}$.

设$n = 1$, 则$a = s_1a_1, a' = t_1a_1, ss_1 = tt_1$, 所以结论成立. 下设$n > 1$.考虑以下三种情形:

(i) $s = x^k, t = x^l, 1 \leqslant k \leqslant l$.

此时每个$z_i = x^{k_i}$, 其中$k_i \geqslant k$. 显然x^k是S的左可消元, 所以有

$$\begin{array}{ll} & a = x^{k_2-k}s_2a_2, \\ sx^{k_2-k}s_2 = x^{k_3}t_2, & t_2a_2 = s_3a_3, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ z_ns_n = tt_n, & t_na_n = a'. \end{array}$$

由归纳假定即可得结论.

(ii) $s = x^k, t = y^l, k, l \geqslant 1$.

如果$z_2 = x^k$, 则由x^k左可消可知$s_1 = t_1$. 所以

$$\begin{array}{ll} & a = s_2a_2, \\ ss_2 = z_3t_2, & t_2a_2 = s_3a_3, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ z_ns_n = tt_n, & t_na_n = a'. \end{array}$$

所以可用归纳假定得出结论.

因此设$z_2 = y^l$. 此时由$ss_1 = z_2t_1$可得$x^ks_1 = y^lt_1$. 所以肯定有$s_1 = y^p, p \geqslant 1$. 利用等式$y^p = x^ky^p$和$y^l = x^ky^l$可得如下等式组:

$$\begin{array}{ll} & a = z_2s_2a_2, \\ sz_2s_2 = z_3t_2, & t_2a_2 = s_3a_3, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ z_ns_n = tt_n, & t_na_n = a'. \end{array}$$

所以结论可由归纳假定得出.

若$s = y^k, t = x^l$, 则证明方法同上.

(iii) $s = y^k, t = y^l, 1 \leqslant k \leqslant l$.

此时有

$$\begin{aligned} & & a &= x_1^{p_1} a_1, \\ y^k x_1^{p_1} &= y^{k_2} y_1^{m_1}, & y_1^{m_1} a_1 &= x_2^{p_2} a_2, \\ y^{k_2} x_2^{p_2} &= y^{k_3} y_2^{m_2}, & y_2^{m_2} a_2 &= x_3^{p_3} a_3, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ y^{k_n} x_n^{p_n} &= y^l y_n^{m_n}, & y_n^{m_n} a_n &= a'. \end{aligned}$$

其中$a_i \in A, x_i, y_i \in \{x, y\}, m_i, p_i \geqslant 0, k_i \geqslant k$. 设$m_1 = 0$,则$y_1^{m_1} = 1$. 所以上述等式组中等式的个数可减少.若$p_2 = 0$,则同理等式的个数可减少.故设$m_1, p_2 \geqslant 1$.

设$y_1 = x_2 = y$.由$y^k x_1^{p_1} = y^{k_2} y_1^{m_1}$可得$y^k x_1^{p_1} = y^{k_2+m_1}$.若$x_1 = x$, 则$k = k_2 + m_1$, 但$m_1 \geqslant 1, k_2 \geqslant k$, 矛盾. 所以$x_1 = y$, 从而有$k + p_1 = k_2 + m_1$. 因此, $a = y^{p_1} a_1 = y^{k_2+m_1-k} a_1 = y^{k_2-k} y^{m_1} a_1 = y^{k_2-k} y^{p_2} a_2 = y^{k_2+p_2-k} a_2$, 并且$y^k y^{p_2+k_2-k} = y^{k_2} y^{p_2} = y^{k_3} y_2^{m_2}$, 故有:

$$\begin{aligned} & & a &= y^{k_2+p_2-k} a_2, \\ y^k y^{k_2+p_2-k} &= y^{k_3} y_2^{m_2}, & y_2^{m_2} a_2 &= x_3^{p_3} a_3, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ y^{k_n} x_n^{p_n} &= y^l y_n^{m_n}, & y_n^{m_n} a_n &= a'. \end{aligned}$$

由归纳假定即可得结论.

设y_1和x_2都是x或者有某一个是x. 由等式$y_1^{m_1} a_1 = x_2^{p_2} a_2$及已证明的情形(i)、(ii)可知存在$a'' \in A, u, v \in S$, 使得$y_1^{m_1} u = x_2^{p_2} v, a_1 = ua'', a_2 = va''$. 所以有:

$$\begin{aligned} & & a &= x_1^{p_1} u a'', \\ y^k x_1^{p_1} u &= y^{k_3} y_2^{m_2} v, & y_2^{m_2} v a'' &= x_3^{p_3} a_3, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ y^{k_n} x_n^{p_n} &= y^l y_n^{m_n}, & y_n^{m_n} a_n &= a'. \end{aligned}$$

由归纳假定即可完成证明.所以A满足条件(P).

此即证明了任意弱平坦S -系都满足条件(P).

§5.8 单循环系的平坦性

由前几节的讨论可知,关于循环系的平坦性的研究还远没有结束, 例如,不知道如何刻画所有循环平坦系满足条件(P)的幺半群,本节讨论一类简单的循环系的平坦性. 即使对这类较简单循环系的平坦性,仍有许多问题是没有解决的.

本节的主要结果选自于文献[47].

定义 5.8.1 设S是幺半群,把形如$S/\lambda(s,t)$的循环系叫做单循环系.

设$S=\langle N,\cdot\rangle$, 令$\lambda=\lambda(1,2)\vee\lambda(1,3)$, 则$S/\lambda$不是单循环系.

为了以后的应用,先证明

命题 5.8.2 设S是幺半群, λ是S上的左同余, 则有:

(1) S/λ是自由S -系当且仅当存在$u,v\in S$, 使得$uv=1$, 并且对任意$x,y\in S$, $xv=yv\Leftrightarrow x\lambda y$;

(2) S/λ是投射的当且仅当存在$e\in S$, 使得$e\lambda 1$, 并且对任意$x,y\in S, x\lambda y\Rightarrow xe=ye$;

(3) S/λ是主弱平坦的当且仅当对任意$u,v,x\in S$, 若$xu\lambda xv$, 则$u(\lambda\vee\Delta x)v$;

(4) S/λ是挠自由的当且仅当对任意$u,v\in S$以及S的任意左可消元c, 若$cu\lambda cv$, 则$u\lambda v$.

证明 (1)作映射$f:S/\lambda\to S$为:

$$f(\overline{s})=sv,\quad \forall\ s\in S.$$

由条件可知f是有定义的. 显然f是S -单同态. 对任意$t\in S, t=t\cdot 1=tuv=f(\overline{tu})$. 所以$f$是满的, 从而$S/\lambda\simeq S$是自由$S$ -系.

反过来, 设S/λ是自由S -系, 则有S -同构$f:S/\lambda\to S$. 设$f(\overline{1})=v\in S, f(\overline{u})=1$, 其中$u\in S$. 则$uv=uf(\overline{1})=f(\overline{u})=1$, 并且对任意$x,y\in S, x\lambda y\Leftrightarrow xv=yv$.

(2)设存在$e\in S$, 使得$e\lambda 1$并且$x\lambda y\Rightarrow xe=ye$. 作映射$f:S/\lambda\to Se$为

$$f(\overline{s})=se,\quad \forall\ s\in S.$$

由条件知f是有定义的. 显然f是S -满同态. 若$se=te$, 则$s\lambda se=te\lambda t$, 所以f是单的, 故有S -同构$S/\lambda\simeq Se$. 由条件易知$e^2=e$. 所以S/λ是投射的.

反过来,设S/λ是投射的,则自然满同态$\sigma:S\to S/\lambda$是可收缩的,即存在S -同态$g:S/\lambda\to S$, 使得$\sigma g=1$. 设$g(\overline{1})=e\in S$, 则$\overline{1}=\sigma g(\overline{1})=\sigma(e)=\overline{e}$, 即$e\lambda 1$. 设$x\lambda y$, 则$xe=xg(\overline{1})=g(\overline{x})=g(\overline{y})=yg(\overline{1})=ye$.

(3)设S/λ是主弱平坦的, $u,v,x\in S$, 满足$xu\lambda xv$. 则$x\overline{u}=x\overline{v}$, 所以在$S\otimes S/\lambda$中有$x\otimes\overline{u}=x\otimes\overline{v}$. 由$S/\lambda$的主弱平坦性即知在$xS\otimes S/\lambda$中有$x\otimes\overline{u}=x\otimes\overline{v}$. 所以存在$s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n\in S$, 使得:

$$\begin{aligned} & \overline{u}=s_1\overline{1},\\ xs_1=xt_1, \qquad & t_1\overline{1}=s_2\overline{1},\\ \cdots\cdots \qquad & \cdots\cdots\\ xs_n=xt_n, \qquad & t_n\overline{1}=\overline{v}. \end{aligned}$$

因此有:

$$u\lambda s_1(\Delta x)t_1\lambda s_2\cdots\lambda s_n(\Delta x)t_n\lambda v,$$

即$u(\lambda\vee\Delta x)v$.

反过来, 设$x\in S$, $\overline{u},\overline{v}\in S/\lambda$, 在$S\otimes S/\lambda$中有$x\otimes\overline{u}=x\otimes\overline{v}$. 则$x\overline{u}=x\overline{v}$, 所以$xu\lambda xv$. 由条件即知$u(\lambda\vee\Delta x)v$. 所以存在$s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n\in S$, 使得:

$$u\lambda s_1(\Delta x)t_1\lambda s_2(\Delta x)t_2\cdots\lambda s_n(\Delta x)t_n=v.$$

因此在$xS\otimes S/\lambda$中有:

$$\begin{aligned} x\otimes\overline{u}&=x\otimes\overline{s_1}=xs_1\otimes\overline{1}=xt_1\otimes\overline{1}\\ &=x\otimes\overline{t_1}=x\otimes\overline{s_2}=\cdots=x\otimes\overline{s_n}\\ &=xs_n\otimes\overline{1}=xt_n\otimes\overline{1}=x\otimes\overline{t_n}=x\otimes\overline{v}. \end{aligned}$$

所以S/λ是主弱平坦的.

(4)设S/λ是挠自由的, c是S的左可消元, $u,v\in S$, 满足$cu\lambda cv$, 则$c\overline{u}=c\overline{v}$, 所以$\overline{u}=\overline{v}$, 即$u\lambda v$.

反过来, 容易证明S/λ是挠自由的. □

S/λ是强平坦系(或平坦系、弱平坦系,满足条件(P))的等价刻画已在前几节中出现过.

设$w\in S,t$是S的正则元, 则推论5.6.5中已经证明了$S/\lambda(tw,t)$是平坦S -系. 事实上有:

定理 5.8.3 以下几条是等价的:

(1) 对任意$w,t\in S,S/\lambda(tw,t)$是平坦的;

(2) 对任意$w,t\in S,S/\lambda(tw,t)$是弱平坦的;

(3) 对任意$w,t\in S,S/\lambda(tw,t)$是主弱平坦的;

(4) S是正则幺半群.

证明　由推论5.6.5及下面的命题即得本定理. □

命题 5.8.4　设$w,t \in S, tw \neq t, \lambda = \lambda(tw,t)$. 若$S$ -系S/λ是主弱平坦的, 则t是S的正则元.

证明　由于$tw\lambda t$, 所以由命题5.8.2知$w(\lambda \vee \Delta t)1$. 记$\Phi = \lambda \circ \Delta t$, n是使得$w\Phi^n 1$的最小非负整数.由于$tw \neq t$, 所以$n \geqslant 1$.设

$$w = u_1\lambda v_1(\Delta t)u_2\lambda v_2 \cdots u_n\lambda v_n(\Delta t)1,$$

则$tv_1 = tu_2, tv_2 = tu_3, \cdots, tv_n = t$, 并且对于$u_i\lambda v_i$, 由引理5.6.1知存在$m_i, p_i \geqslant 0$, 使得$u_iw^{m_i} = v_iw^{p_i}(1 \leqslant i \leqslant n)$,并且

$$u_iw^k, \quad v_iw^l \in St, \quad 0 \leqslant k < m_i, \quad 0 \leqslant l < p_i.$$

设$p_n > 0$, 则$v_n \in St$, 所以$t = tv_n \in tSt$, 故t是正则元. 因此设$p_n = 0$. 此时$t = tv_n = tu_nw^{m_n} = tv_{n-1}w^{m_n}$. 如果$m_n < p_{n-1}$, 则$v_{n-1}w^{m_n} \in St$, 从而$t \in tSt$. 故设$m_n \geqslant p_{n-1}$. 因此

$$\begin{aligned} t &= tv_{n-1}w^{m_n} = tv_{n-1}w^{p_{n-1}}w^{m_n-p_{n-1}} \\ &= tu_{n-1}w^{m_{n-1}+m_n-p_{n-1}} = tu_{n-1}w^{m_n-p_{n-1}+m_{n-1}} \\ &= tv_{n-2}w^{m_n-p_{n-1}+m_{n-1}}. \end{aligned}$$

如果$m_n - p_{n-1} + m_{n-1} < p_{n-2}$, 则$v_{n-2}w^{m_n-p_{n-1}+m_{n-1}} \in St$, 从而$t \in tSt$. 故设$m_n - p_{n-1} + m_{n-1} \geqslant p_{n-2}$. 所以有

$$\begin{aligned} t &= tv_{n-2}w^{p_{n-2}}w^{m_n-p_{n-1}+m_{n-1}-p_{n-2}} \\ &= tu_{n-2}w^{m_n-p_{n-1}+m_{n-1}-p_{n-2}+m_{n-2}} \\ &= tv_{n-3}w^{m_n-p_{n-1}+m_{n-1}-p_{n-2}+m_{n-2}}. \end{aligned}$$

继续上述过程,则有两种可能出现: $t \in tSt$, 或者有

$$t = tv_1w^{\sum\limits_{i=2}^{n}(m_i-p_i)},$$

这里$\sum\limits_{i=2}^{n}(m_i - p_i) \geqslant p_1$. 对于第一种情形, 已经没有什么可证的了. 对于第二种情形, 有:

$$t = tu_1w^{\sum\limits_{i=2}^{n}(m_i-p_i)-p_1-m_1} = tu_1w^{\sum\limits_{i=1}^{n}(m_i-p_i)+1},$$

这里$\sum\limits_{i=1}^{n}(m_i - p_i) \geqslant 0$. 下面证明此时仍有$t$是正则元.

设$m_1 > 0$, 则$u_1 \in St$, 所以$tw = tu_1 \in tSt$. 设$tw = txt, x \in S$. 则$tw^2 = txtw = tx(txt) = (tx)^2t$. 用简单的数学归纳法可证明对任意正整数$k$, $tw^k = (tx)^kt$. 令$k = \sum\limits_{i=1}^{n}(m_i - p_i) + 1$, 则$t = tw^k = (tx)^kt \in tSt$, 所以$t$是正则元.

设$m_1 = 0$, 则$tw = tu_1 = tv_1w^{p_1} = tu_2w^{p_1}$. 如果$p_1 < m_2$, 则$u_2w^{p_1} \in St$, 故$tw \in tSt$. 类似于前段的证明可知$t$是正则元. 设$p_1 \geqslant m_2$, 则

$$tw = tu_2w^{m_2}w^{p_1-m_2} = tv_2w^{p_1-m_2+p_2} = tu_3w^{p_1-m_2+p_2}.$$

如果$p_1 - m_2 + p_2 < m_3$, 则$u_3w^{p_1-m_2+p_2} \in St$, 故$tw \in tSt$, 从而$t$是正则元. 设$p_1 - m_2 + p_2 \geqslant m_3$, 则

$$\begin{aligned} tw &= tu_3w^{m_3}w^{p_1-m_2+p_2-m_3} \\ &= tv_3w^{p_1-m_2+p_2-m_3+p_3} = tu_4w^{p_1-m_2+p_2-m_3+p_3}. \end{aligned}$$

继续上述过程, 则或者t是正则元, 或者有

$$tw = tu_nw^{\sum\limits_{i=1}^{n-1}(p_i-m_i)},$$

这里$\sum\limits_{i=1}^{n-1}(p_i - m_i) \geqslant m_n$. 所以

$$tw = tv_nw^{\sum\limits_{i=1}^{n-1}(p_i-m_i)-m_n+p_n} = tw^{\sum\limits_{i=1}^{n}(p_i-m_i)},$$

并且$\sum\limits_{i=1}^{n}(p_i - m_i) \geqslant 0$.

因此$\sum\limits_{i=1}^{n}(p_i - m_i) = 0$, 从而$tw = t$. 矛盾. 所以$t$是正则元. □

设$t, w \in S$. 称t是w-正则的, 如果$tw \neq t$, 并且对S的任意左可消元c, 任意$u \in S$, 若$cu \in St$, 则$u\lambda(tw, t)uw$.

如果S只含有一个左可消元1, 则对任意$t, w \in S$, 若$tw \neq t$, 则t是w-正则的.事实上,若$u = xt, x \in S$,则$u = xt\lambda(tw, t)xtw = uw$.

设t是S中的正则元, $w \in S, tw \neq t$. 若$cu = xt, x \in S$, 则$cu = xt = xtt't = cut't$, 所以$u = ut't\lambda(tw, t)ut'tw = uw$. 故正则元$t$若满足$tw \neq t$, 则$t$是$w$-正则的.

命题 5.8.5 设$t, w \in S, tw \neq t$,则$S/\lambda(tw, t)$是挠自由系当且仅当t是w-正则的.

证明 记$\lambda = \lambda(tw, t)$. 设S/λ是挠自由的, $u, x \in S$, c是S的左可消元, $cu = xt$, 则$cu = xt\lambda xtw = cuw$. 由命题5.8.2即知$u\lambda uw$, 所以t是w-正则的.

反过来,设t是w-正则的. 假定$u,v \in S, c$是S的左可消元, 并且$cu\lambda cv$. 由引理5.6.1知存在$m,n \geqslant 0$, 使得$cuw^m = cvw^n$, 并且$cuw^i, cvw^j \in St, 0 \leqslant i < m, 0 \leqslant j < n$. 由于$c$是左可消的, 所以有$uw^m = vw^n$. 若$m > 0$, 则$cu \in St$, 所以$u\lambda uw$. 若$m > 1$, 则$cuw \in St$, 所以$uw\lambda uw^2$, 从而有$u\lambda uw^2$. 继续上述过程可得$u\lambda uw^m$. 同理可得$v\lambda vw^n$. 所以$u\lambda v$, 从而由命题5.8.2知$S/\lambda$是挠自由的. □

推论 5.8.6 设S是幺半群, $t \in S$, 则$S/\lambda(t^2,t)$是挠自由系的充要条件是: 对S的任意左可消元c, 任意元u, 若$cu \in St$, 则$u \in St$.

证明 设$u = xt \in St$, 则$u = xt\lambda(t^2,t)xt^2 = ut$. 反过来设$u\lambda(t^2,t)ut$, 则由引理5.6.1知存在$m,n \geqslant 0$, 使得$ut^m = utt^n$, 并且$ut^i, utt^j \in St, 0 \leqslant i < m, 0 \leqslant j < n$. 若$m = 0$, 则$u = ut^{n+1} \in St$. 若$m > 0$, 则$u \in St$. 所以证明了$u \in St$当且仅当$u\lambda(t^2,t)ut$.

由命题5.8.5知$S/\lambda(t^2,t)$是挠自由系当且仅当$t^2 = t$, 或t是t-正则的. 所以由前段证明的结果即可知结论成立(若$t = t^2$, 则$cu = xt = xt^2 = cut$, 所以$u = ut \in St$). □

命题 5.8.7 设$w,t \in S, tw \neq t, \lambda = \lambda(tw,t)$, 则以下条件是等价的:

(1) S/λ满足条件(P);

(2) $t\mathscr{L}1$, 或者$t\mathscr{R}tw\mathscr{L}1$;

(3) $\lambda = \lambda(y,1)$, 其中$y \in S$.

证明 (3)⇒(1)由命题5.3.1即得.

(2)⇒(3)设$t\mathscr{L}1$, 则存在$x \in S$, 使得$xt = 1$. 所以由$tw\lambda t$即得$w\lambda 1$. 反之若$w\theta 1$, 则显然有$tw\theta t$, 这里θ是S上的任意包含$(w,1)$的左同余. 所以$\lambda = \lambda(w,1)$.

设$t\mathscr{R}tw\mathscr{L}1$, 则存在$q,z \in S$, 使得$t = twq, ztw = 1$. 所以$t = twq = tw \cdot 1 \cdot q = twztwq = twzt$, 因此对$S$上的任意左同余$\theta$有

$$tw\theta t \Leftrightarrow zt\theta 1.$$

所以有$\lambda = \lambda(zt,1)$.

(1)⇒(2)设S/λ满足条件(P). 因为$tw\lambda t$, 所以由命题5.1.1知存在$u,v \in S$, 使得$twu = tv$并且$u\lambda 1\lambda v$. 设$t\mathscr{L}1$不成立, 即$1 \notin St$. 考虑以下三种情形:

(i) $u = 1$. 此时$tw = tv, v\lambda 1$. 因为$tw \neq t$, 所以$v \neq 1$. 由引理5.6.1知存在$m,n \geqslant 0$,使得$vw^m = 1 \cdot w^n$, 并且$vw^i, w^j \in St$, $0 \leqslant i < m, 0 \leqslant j < n$. 若$n > 0$, 则$1 = w^0 \in St$,矛盾. 所以$n = 0$. 故$vw^m = 1$, 从而$m > 0$. 因此$vw^{m-1} = xt \in St$. 由$xtw = vw^m = 1$及$tw = tv$可得$xtv = 1$. 所以$w^m = 1 \cdot w^m = xtvw^m = xt$. 因此$1 = vw^m = vxt \in St$. 矛盾.

(ii) $v = 1$.此时$twu = t$并且$u\lambda 1$.同样$u \neq 1$. 由引理5.6.1知存在$m, n \geqslant 0$, 使得$uw^m = 1 \cdot w^n, uw^i, w^j \in St, 0 \leqslant i < m, 0 \leqslant j < n$. 显然$n = 0$(否则$1 \in St$). 所以$m > 0$. 设$uw^{m-1} = xt$, 则$xtw = 1, xt = x(twu) = (xtw)u = u$, 所以$t = twu = twxt$. 这说明$t\mathscr{R}tw\mathscr{L}1$.

(iii) $u \neq 1, v \neq 1$.此时有$twu = tv, u\lambda 1\lambda v$. 对于$u\lambda 1$和$v\lambda 1$利用引理5.6.1知存在$m, p, n, q \geqslant 0$, 使得$uw^m = 1 \cdot w^p, vw^n = 1 \cdot w^q, uw^i, vw^j, w^k, w^h \in St, 0 \leqslant i < m, 0 \leqslant j < n, 0 \leqslant k < p, 0 \leqslant h < q$. 若$p > 0$, 则$1 = w^0 \in St$,矛盾. 所以$p = 0$. 同理可证$q = 0$. 因此有$uw^m = 1 = vw^n$. 显然$m, n > 0$(否则$u = 1$,或$v = 1$).若$m = n$,则在$twu = tv$的两边右乘$w^m$即得$tw = t$, 矛盾. 设$m < n$, 则$t = tvw^n = twuw^n = twuw^m w^{n-m} = tw(uw^m)w^{n-m} = tww^{n-m}$. 设$uw^{m-1} = xt$, 则$xt = x(tw^{n-m+1}) = (xtw)w^{n-m} = (uw^{m-1}w)w^{n-m} = w^{n-m}$. 所以

$$1 = vw^n = vw^m w^{n-m} = vw^m xt \in St,$$

矛盾.

所以只能有$m > n$. 由$vw^n = 1$及$twu = tv$得$t = t \cdot 1 = tvw^n = twuw^n$, 所以$tw^{m-n} = twuw^n w^{m-n} = twuw^m = tw$. 设$uw^{m-1} = xt$, 则$xtw^{m-n} = xtww^{m-n-1} = xtw$, 而$xtw = 1$, 所以$w^{m-n-1} = 1$. 如果$m - n > 1$, 则$w$是可逆元, 所以由$xtw = 1$即得$wxt = 1$, 因此$1 \in St$, 矛盾. 所以$m - n = 1$. 继续设$uw^{m-1} = xt$, 则$t = t \cdot 1 = tvw^n = twuw^n = tw(uw^{m-1}) = twxt$. 所以有$t\mathscr{R}tw\mathscr{L}1$. □

命题 5.8.8 设$t, w \in S, tw \neq t, \lambda = \lambda(tw, t)$, 则以下三条是等价的:

(1) S/λ是投射的;

(2) S/λ是强平坦的;

(3) t是左可逆元并且w是周期元(即存在$m \geqslant 0$使得$w^m = w^{m+1}$).

证明 (1)⇒(2)显然.

(2)⇒(3)设S/λ是强平坦的,则对于$tw\lambda t$,由命题5.1.2知存在$u \in S$,使得$twu = tu, u\lambda 1$. 显然$u \neq 1$(否则$tw = t$). 由引理5.6.1知存在$m, n \geqslant 0$, 使得$uw^m = w^n, uw^i, w^j \in St, 0 \leqslant i < m, 0 \leqslant j < n$. 若$n = 0$, 则$uw^m = 1$, 又得到$tw = t$, 矛盾. 所以$n > 0$,从而$1 = w^0 \in St$,这说明$t$是左可逆元. 现在很容易证明$\lambda = \lambda(w, 1)$. 所以由命题5.1.4知$w$是周期元.

(3)⇒(2)若t是左可逆元, 则$\lambda = \lambda(w, 1)$.又因为w是周期元, 所以由命题5.1.4知S/λ是强平坦的.

(2)⇒(1)由下命题即得. □

命题 5.8.9 单循环系的投射性与强平坦性是一致的.

证明　设S/λ是强平坦S -系, 其中$\lambda = \lambda(s,t)$. 由命题5.1.2知存在$e \in S$, 使得$se = te$, 并且$e\lambda 1$. 设$x, y \in S$, 满足$x\lambda y$, $x \neq y$, 则存在$t_1, \cdots, t_n \in S$,使得:

$$x = t_1x_1, t_1y_1 = t_2x_2, \cdots, t_ny_n = y,$$

其中$\{x_i, y_i\} = \{s,t\}, i = 1, \cdots, n$. 因为$se = te$, 所以$x_ie = y_ie$, 因此有$xe = ye$. 由命题5.8.2即知$S/\lambda$是投射的. □

命题 5.8.10　设$t, w \in S, tw \neq t, \lambda = \lambda(tw,t)$. 则有以下两条等价:

(1) S/λ是自由系;

(2) t是左可逆元, 并且存在n,使得$w^n = w^{n+1}$, 存在$u, v \in S$, 使得$uv = 1$, 对任意$x, y \in S$, 有$xv = yv \Leftrightarrow xw^n = yw^n$.

证明　(1)⇒(2)设S/λ是自由的, 则由命题5.8.8即知t是左可逆元, w是周期元. 所以$\lambda = \lambda(w,1)$, 并且存在n, 使得$w^n = w^{n+1}$. 由引理5.6.1易知对任意$x, y \in S$, $x\lambda(w,1)y$当且仅当$xw^n = yw^n$. 所以由命题5.8.2即知结论成立.

(2)⇒(1)利用命题5.8.2进行简单地验证. □

定理 5.8.11　对于幺半群S, 以下几条等价:

(1) 所有形如$S/\lambda(tw,t)$的挠自由系是平坦的;

(2) 所有形如$S/\lambda(tw,t)$的挠自由系是弱平坦的;

(3) 所有形如$S/\lambda(tw,t)$的挠自由系是主弱平坦的;

(4) 对于任意$t, w \in S$, 若t是w-正则的,则t是正则的.

证明　设$S/\lambda(tw,t)$是挠自由的. 若$tw = t$, 则$S/\lambda(tw,t)$显然是平坦的. 若 $tw \neq t$, 则由命题 5.8.5 知 t 是 w-正则的. 所以 t 是正则的, 从而由推论5.6.5知$S/\lambda(tw,t)$是平坦的. 此即完成了(4)⇒(1).

(3)⇒(4)由命题5.8.4和命题5.8.5即得. □

定理 5.8.12　对于幺半群S, 以下几条等价:

(1) 所有形如$S/\lambda(tw,t)$的平坦系满足条件(P);

(2) 所有形如$S/\lambda(tw,t)$的弱平坦系满足条件(P);

(3) 所有形如$S/\lambda(tw,t)$的主弱平坦系满足条件(P);

(4) 任意$e \in E(S) - \{1\}$都是S的左零元.

证明　(3)⇒(2)⇒(1)显然.

(1)⇒(4)由推论5.6.6的证明即得.

(4)⇒(3)设$t, w \in S, S/\lambda(tw,t)$是主弱平坦$S$ -系. 若$tw = t$, 则$S/\lambda(tw,t) \simeq S$显然满足条件(P). 设$tw \neq t$. 则由命题5.8.4知t是S中的正则元. 设$t = tt't$, 则$t't \in E(S)$.若$t't \neq 1$, 则由条件知$t't$是S的左零元,所以t也是S的左零元, 从

而$tw = t$,矛盾.因此$t't = 1$, 从而$\lambda(tw, t) = \lambda(w, 1)$. 所以由命题5.8.7知$S/\lambda(tw, t)$满足条件(P). □

定理 5.8.13 对于幺半群S,以下几条是等价的:

(1) 所有形如$S/\lambda(tw, t)$的挠自由系满足条件(P);

(2) 对任意$t, w \in S$, 若t是w-正则的, 则t是可逆元或左零元.

证明 (1)⇒(2)设所有形如$S/\lambda(tw, t)$的挠自由系满足条件(P). 假定t是w-正则的, 则由定理5.8.11知t是正则元, 所以存在$t' \in S$, 使得$t = tt't$. 若$t't \neq 1$, 则由定理5.8.12知$t't$是S的左零元, 从而t是左零元. 若$tt' \neq 1$, 则同理$t't$是S的左零元, 所以$t = tt't = (tt')t = tt'$也是左零元. 设$t't = 1$并且$tt' = 1$, 则t是可逆元.

(2)⇒(1)设$t, w \in S$. 若$tw = t$, 则显然$S/\lambda(tw, t)$满足条件(P). 设$tw \neq t$, 并且$S/\lambda(tw, t)$是挠自由S-系, 则t是w-正则的, 从而t是可逆元或左零元. 由此即知$S/\lambda(tw, t)$满足条件(P). □

定理 5.8.14 对于幺半群S, 以下几条等价:

(1) 所有形如$S/\lambda(tw, t)$的S-系满足条件(P);

(2) $S = G \dot{\cup} Z$, 其中G是群, Z中的任意元都是S的左零元.

证明 (1)⇒(2)由定理5.8.3知任意$t \in S$都是正则元, 所以由定理5.8.13知t是可逆元或S的左零元.由此即得(2).

(2)⇒(1)由定理5.8.3和定理5.8.12即得. □

定理 5.8.15 对于幺半群S, 以下几条等价:

(1) 所有形如$S/\lambda(tw, t)$并且满足条件(P)的S-系是投射的;

(2) 所有形如$S/\lambda(tw, t)$并且满足条件(P)的S-系是强平坦的;

(3) S中的任意元都是周期的.

证明 由命题5.1.3,5.1.4, 定理5.1.5和命题5.8.9即得此结论. □

定理 5.8.16 对于幺半群S, 以下几条等价:

(1) 所有形如$S/\lambda(tw, t)$的平坦S-系是投射的;

(2) 所有形如$S/\lambda(tw, t)$的弱平坦S-系是投射的;

(3) 所有形如$S/\lambda(tw, t)$的主弱平坦S-系是投射的;

(4) 所有形如$S/\lambda(tw, t)$的平坦S-系是强平坦的;

(5) 所有形如$S/\lambda(tw, t)$的弱平坦S-系是强平坦的;

(6) 所有形如$S/\lambda(tw, t)$的主弱平坦S-系是强平坦的;

(7) S是左谐零幺半群.

证明 只需证明(7)⇒(3)和(4)⇒(7).

(7)⇒(3)设S是左谐零幺半群, 则任意$e \in E(S) - \{1\}$都是S的左零元, 并且S中的任意元均为周期元. 所以由定理5.8.12和定理5.8.15以及命题5.8.9即得此结论.

(4)⇒(7)由定理5.8.12和定理5.8.15即得. □

定理 5.8.17 对于幺半群S,以下几条等价:

(1) 所有形如$S/\lambda(tw,t)$的S -系是投射的;

(2) 所有形如$S/\lambda(tw,t)$的S -系是强平坦的;

(3) 所有形如$S/\lambda(tw,t)$的挠自由S -系是投射的;

(4) 所有形如$S/\lambda(tw,t)$的挠自由S -系是强平坦的;

(5) $S = Z^1$, 其中$Z = \emptyset$或Z是左零半群.

证明 只需证明(4)⇒(5)和(5)⇒(1).

(4)⇒(5)设$t \in S$不是左零元, 则存在$w \in S$, 使得$tw \neq t$. 设$c \in S$是S的左可消元, 并且$c \neq 1$. 由定理5.8.16知存在n, 使得c^n是左零元. 所以有$c^ntw = c^n = c^nt$但$tw \neq t$. 这说明S中除了1以外再没有左可消元. 所以由$tw \neq t$即知t是w-正则的, 因此$S/\lambda(tw,t)$是挠自由系, 从而是强平坦的.由定理5.8.13即知t是可逆元.

设$t \neq 1$, 则由定理5.8.16知存在m, 使得t^m是左零元. 而t^m显然又是可逆元. 矛盾. 所以$t = 1$. 这即证明了S中的非左零元只能是1. 所以$S = Z^1$,其中$Z = \emptyset$,或Z是左零半群.

(5)⇒(1)由定理5.8.3和定理5.8.16即得结论. □

定理 5.8.18 对于幺半群S, 以下几条等价:

(1) 所有形如$S/\lambda(tw,t)$的S -系是挠自由的;

(2) S的任意左可消元是左可逆元.

证明 (2)⇒(1)由定理4.5.12即得.

(1)⇒(2)设$s \in S$是左可消元, 则$S/\lambda(s^2,s)$是挠自由S -系. 显然有$\overline{s^2} = \overline{s}$,所以$s\overline{s} = s \cdot \overline{1}$, 故$\overline{s} = \overline{1}$. 因此$s = 1$, 或者存在$t_1, \cdots, t_n \in S$, 使得:

$$s = t_1c_1, t_1d_1 = t_2c_2, \cdots, t_nd_n = 1,$$

其中$\{c_i, d_i\} = \{s^2, s\}, i = 1, \cdots, n$. 所以存在$x \in S$, 使得$xs = 1$. 因此$s$是左可逆元. □

定理 5.8.19 对于幺半群S,以下几条等价:

(1) 所有形如$S/\lambda(tw,t)$的投射S -系是自由的;

(2) 所有形如$S/\lambda(tw,t)$的强平坦S -系是自由的;

(3) 任意$e \in E(S), e\mathcal{D}1$.

证明 (1)⇒(3)设$e \in E(S)$, 则由命题5.8.8知$S/\lambda(e,1)$是投射S -系. 设$e \neq 1$. 由命题5.8.10知存在$u, v \in S$, 使得$uv = 1$, 并且对任意$x, y \in S, xv = yv \Leftrightarrow xe = ye$. 因为$e \cdot e = 1 \cdot e$, 所以$ev = v$. 又因为$vu \cdot v = 1 \cdot v$, 所以$vue = e$. 因此$e\mathscr{R}v$. 又显然$1\mathscr{L}v$, 所以$e\mathscr{D}1$.

(1)⇔(2)由命题5.8.9即得.

(3)⇒(1)由以下的命题即得. □

定理 5.8.20 对于幺半群S,以下几条等价:

(1) 所有投射S -系是自由的;

(2) 所有循环投射S -系是自由的;

(3) 任意$e \in E(S)$, 有$e\mathscr{D}1$.

证明 只需证明(3)⇒(1).

设$e \in E(S)$, 则$e\mathscr{D}1$, 所以存在$a \in S$, 使得$e\mathscr{L}a, a\mathscr{R}1$, 令$f: S \to Sa, f(s) = sa$. 则$f$是$S$ -满同态. 因为$a\mathscr{R}1$, 所以存在$b \in S$, 使得$ab = 1$. 设$sa = ta$, 则易知有$s = t$, 所以f是单同态. 因此f是S到$Sa = Se$的同构, 故Se是自由S -系. 因为任意投射S -系都是$Se_i(e_i \in E(S))$的不交并, 所以结论得证. □

定理 5.8.21 对于幺半群S, 以下几条等价:

(1) 所有形如$S/\lambda(tw,t)$并且满足条件(P)的S -系是自由的;

(2) 所有形如$S/\lambda(tw,t)$的平坦S -系是自由的;

(3) 所有形如$S/\lambda(tw,t)$的弱平坦S -系是自由的;

(4) 所有形如$S/\lambda(tw,t)$的主弱平坦S -系是自由的;

(5) 所有形如$S/\lambda(tw,t)$的挠自由S -系是自由的;

(6) 所有形如$S/\lambda(tw,t)$的S -系是自由的;

(7) 所有S -系是自由的.

(8) $S = \{1\}$.

证明 只需证明(1)⇒(8).

由定理5.8.15和定理5.8.19知S中的任意元都是周期元, 并且任意$e \in E(S)$, $e\mathscr{D}1$. 设$x \in S$, 则存在n, 使得$x^n = x^{n+1}$. 令$e = x^n$, 则存在$u \in S$, 使得$e\mathscr{L}u\mathscr{R}1$. 所以$uv = 1, ue = u, su = e$. 对于$v$, 存在$m$使得$v^m = v^{m+1}$. 所以$v = 1$, 从而$u = 1$, 故$e = 1 = x^n$. 因此$x = 1$. □

下面考虑利用单循环S -系的同调性质对幺半群进行同调分类的问题. 实际上前面已经得到过许多这方面的结果.

定理 5.8.22 设$s, t \in S, s \neq t, \lambda = \lambda(s,t)$. 如果$S/\lambda$是弱平坦$S$ -系, 则s或t是正则元.

证明　因为$s\lambda t$, 所以由命题5.2.11知存在$u,v\in S$, 使得$su=tv$, 并且$u(\lambda\vee\Delta s)1, v(\lambda\vee\Delta t)1$. 令$\Phi=\lambda\circ\Delta s, \Psi=\lambda\circ\Delta t$. 设$u,v$满足$su=tv, u\Phi^m 1, v\Psi^n 1$, 并且使得$m+n$最小. 因为$s\neq t$, 所以$m+n>0$. 设$m>0$, 则存在$w,z\in S$, 使得$u\lambda w(\Delta s)z\Phi^{m-1}1$. 因此$sw=sz$. 如果$u=w$, 则$tv=su=sw=sz$, 而$z\Phi^{m-1}1$, 这与$m+n$的最小性矛盾. 所以$u\neq w$. 由$u\lambda w$即知存在$t_1,\cdots,t_n\in S$, 使得:

$$u=t_1c_1, t_1d_1=t_2c_2,\cdots,t_nd_n=w,$$

其中$\{c_i,d_i\}=\{s,t\}, i=1,\cdots,n$. 所以$u\in Ss\cup St$. 又存在$a,b\in S$, 使得$u\Phi^{m-1}a\lambda b(\Delta s)1$. 设$a=b$, 考虑两种情形:

(i)$m=1$. 此时$u=a=b$, 所以$su=sa=sb=s$, 因此$\lambda=\lambda(s,t)=\lambda(su,t)=\lambda(tv,t)$, 而$tv\neq t$. 所以由$S/\lambda$的弱平坦性, 利用命题5.8.4即知$t$是正则元.

(ii) $m>1$. 此时存在$c,d\in S$使得$u\Phi^{m-2}c\lambda d(\Delta s)a$. 所以$sd=sa=sb=s$, 因此$u\Phi^{m-2}c\lambda d(\Delta s)1$, 即$u\Phi^{m-1}1$, 矛盾.

设$a\neq b$. 则同上类似的证明可得$b\in Ss\cup St$. 如果$b\in Ss$, 则s是正则元(因为$sb=s$). 设$b\in St$, 则存在$x\in S$使得$b=xt$, 所以$s=sb=sxt$.

设$n>0$. 类似于上面的讨论可知s或t是正则元,或者存在$y\in S$, 使得$t=tys$. 因此$t=tys=ty(sxt)=tysxt$, 即t是正则元.

设$n=0$, 则$v=1$, 所以$su=t$, 故$\lambda=\lambda(s,t)=\lambda(s,su)=\lambda(su,s)$. 由$S/\lambda$的弱平坦性即知$s$是正则的.

以上证明了当$m>0$时结论成立. 同理可证当$n>0$时结论也成立. □

定理 5.8.23　设$z\in S$是S的左零元. 如果$S/\lambda(s,z)$是弱平坦的, 则s是正则的.

证明　若$s=z$, 则s是正则元. 设$s\neq z$. 由命题5.2.11知存在$u,v\in S$, 使得$su=zv=z$. 所以$\lambda(s,z)=\lambda(su,s)$. 由$S/\lambda(su,s)$的弱平坦性即知$s$是正则元. □

定理 5.8.24　对于幺半群S, 以下几条等价:

(1) 所有单循环平坦S -系满足条件(P);

(2) 所有单循环弱平坦S -系满足条件(P);

(3) 任意$e\in E(S)-\{1\}$都是S的左零元.

证明　(2)⇒(1)显然.

(1)⇒(3)由定理5.8.12即得.

下面只需证明(3)⇒ (2).

设$s,t\in S$, $S/\lambda(s,t)$是弱平坦S -系. 要证明$S/\lambda(s,t)$满足条件(P). 显然可以假设$s\neq t$. 由命题5.8.22,可以假定s是正则元,所以$s=ss's, s'\in S$.

设$ss'\neq 1$,或$s's\neq 1$, 则s是左零元. 所以由命题5.8.23知t是正则元. 设$t=tt't, t'\in S$. 若$t't\neq 1$, 或$tt'\neq 1$, 则t是左零元. 因为$S/\lambda(s,t)$是弱平坦的, 所以存在$u,v\in S$, 使得$su=tv$, 因此$s=t$. 矛盾. 所以$tt'=1=t't$, 故$\lambda(s,t)=\lambda(t's,1)$, 从而$S/\lambda(s,t)$满足条件(P).

设$ss'=1=s's$, 则$\lambda(s,t)=\lambda(1,s't)$, 所以$S/\lambda(s,t)$满足条件(P). □

定理 5.8.25 对于幺半群S, 以下几条等价:

(1) 所有单循环挠自由S -系是投射的;

(2) 所有单循环挠自由S -系是强平坦的;

(3) 所有单循环S -系是投射的;

(4) 所有单循环S -系是强平坦的;

(5) $S=\{1\}$或$S=\{1,0\}$.

证明 (3)⇒(4)⇒(2)和(3)⇒(1)⇒(2)是显然的.

(2)⇒(5)设所有单循环挠自由S -系是强平坦的, 则由定理5.8.17知$S=Z^1$, 其中$Z=\emptyset$或Z是左零半群. 设$Z\neq\emptyset, s,t\in Z$. 因为S的左可消元只有1, 所以$S/\lambda(s,t)$是挠自由S -系, 从而由条件知是强平坦的. 因为$s\lambda(s,t)t$, 所以存在$u\in S$, 使得$su=tu$, 故$s=t$. 这说明若$S\neq\{1\}$, 则S中含有唯一的左零元. 因此$S=\{1,0\}$.

(5)⇒(3)若$S=\{1\}$, 则显然所有单循环S -系是投射的. 设$S=\{1,0\}$, 则由定理5.5.3知所有循环S -系满足条件(P). 又由定理5.1.5知所有满足条件(P)的循环S -系是强平坦的. 所以由命题5.8.9知所有单循环S -系是投射的. □

定理 5.8.26 对于幺半群S, 以下几条等价:

(1) 所有单循环S -系满足条件(P);

(2) $S=G$或$S=G^0$, 其中G是群.

证明 (1)⇒(2)设所有单循环S -系满足条件(P), 则由定理5.8.24知任意$e\in E(S)-\{1\}$都是S的左零元. 设$x\in S$. 由命题5.5.2知$x^2=x$, 或x是左可逆元. 如果任意$x\in S$都是左可逆元, 则S是群. 若x不是左可逆元, 则x是左零元. 设x,y都是左零元. 则由于$S/\lambda(x,y)$满足条件(P), 所以存在$u,v\in S$, 使得$xu=yv$, 故$x=y$. 这说明S中最多只有一个左零元.

类似于定理5.5.3的证明即知$S=G$或$S=G^0$, 其中G是群.

(2)⇒(1)由定理5.5.3即得结论. □

下面把利用单循环系的性质对幺半群进行同调分类的有关结果列成一个表,其中有许多结果是前面已证过但没有明确提出的,所以需重新考察前面定理的证明过程.表中也遗留了许多还没有解决的问题. 该表选自文献[47].

是(满足) 所有单循环的···S-系	自由	投射	强平坦	条件(P)	平坦	弱平坦	主弱平坦	挠自由
投射	$\forall e=e^2$ $e\mathscr{D}1$ (5.8.20)							
强平坦	$\forall e=e^2$ $e\mathscr{D}1$ (5.8.20)	所有 (5.8.9)						
条件(P)	$\{1\}$ (5.8.21)	$\forall x\in S$ x是周期元 (5.1.5)	$\forall x\in S$ x是周期元 (5.1.5)					
平坦	$\{1\}$	左谐零 (5.6.8)	左谐零 (5.6.8)	$\forall e\in E(S)$-$\{1\}$ 是左零元 (5.8.24)				
弱平坦	$\{1\}$	左谐零	左谐零	$\forall e\in E(S)$-$\{1\}$ 是左零元	?			
主弱平坦	$\{1\}$	?	?	?	?	?		
挠自由	$\{1\}$	$\{1\}\vee\{1,0\}$ (5.8.25)	$\{1\}\vee\{1,0\}$	?	?	?	?	
所有	$\{1\}$	$\{1\}\vee\{1,0\}$	$\{1\}\vee\{1,0\}$	$G\vee G^0$ (5.8.26)	?	正则且··· (4.5.12)	正则 (4.5.7)	左可消元是左可逆元 (5.8.18)

§5.9　循环系的同调性质

在§ 5.5、§ 5.6、§ 5.7三节中主要讨论了和循环系的平坦性有关的一些问题，在§ 5.8中研究了单循环系的同调性质.本节考虑循环系的同调性质.

由命题5.8.9知对于单循环系$S/\lambda(s,t)$, 其投射性和强平坦性是一致的. 但是对于一般的循环系, 投射性严格强于强平坦性. 这可从以下定理中看出.

定理 5.9.1　对于幺半群S, 以下条件等价:

(1) 所有循环的强平坦S -系是投射的;

(2) S满足以下的条件(FP_1)和(FP_2):

(FP_1)对任意$q_0,q_1,\cdots\in S$, 若$q_{i-1}q_i=q_i, i=1,\cdots$, 则存在$m$, 使得对所有的$i=0,1,\cdots$, 有$q_iq_m=q_m$;

(FP_2)设M是$E(S)$的子集合, 如果对任意$e_1,\cdots,e_n,f_1,\cdots,f_m\in M$, 存在$f\in M$, 满足$e_1\cdots e_nf=f_1\cdots f_mf$, 那么$S$的子半群$\langle M\rangle$中含有右零元.

证明　(2)⇒(1)设Sx是强平坦的循环S -系. 若$s,t\in S$, 使得$sx=tx$, 则由推论4.4.8知存在$q_0\in S$, 使得$sq_0=tq_0$, 并且$x=q_0x$. 对于$x=q_0x$, 再由

推论4.4.8知存在$q_1 \in S$, 使得$q_1 = q_0q_1$, 并且$q_1x = x$. 继续上述过程可知存在$q_0, q_1, \cdots \in S$, 使得$q_ix = x (i = 0, 1, \cdots)$, 并且$q_{i-1}q_i = q_i (i = 1, 2, \cdots)$. 由条件($FP_1$)知存在$q_m$, 使得$q_iq_m = q_m, i = 0, 1, \cdots$. 显然$q_m \in E(S)$, 并且$q_mx = x$.令

$$M(s,t) = \{q_m \in S | \text{存在 } q_0, q_1, \cdots \in S, \text{使得 } q_iq_{i+1} = q_{i+1}, \\ q_ix = x,\ sq_i = tq_i,\ q_iq_m = q_m,\ i = 0, 1, \cdots\},$$

则$M(s,t) \neq \emptyset$. 令

$$M = \bigcup_{s,t \in S} M(s,t),$$

则$M \subseteq E(S)$.

设$e_1, \cdots, e_n, f_1, \cdots, f_m \in M$, 则$e_1 \cdots e_nx = e_1 \cdots e_{n-1}x = \cdots = e_1x = x$, 同理$f_1 \cdots f_mx = x$, 所以$(e_1 \cdots e_n)x = (f_1 \cdots f_m)x$. 由$M$的构造可知存在$f \in M(e_1 \cdots e_n, f_1 \cdots f_m) \subseteq M$, 使得$e_1 \cdots e_nf = f_1 \cdots f_mf$. 所以由条件($FP_2$)知$\langle M \rangle$中存在右零元$e$. 下面证明$Sx \simeq Se$.

作映射$\alpha : Sx \to Se$如下:

$$\alpha(sx) = se, \quad \forall\ s \in S.$$

设$sx = tx$, 则由前面的讨论知存在$q_m \in M$, 使得$sq_m = tq_m$, 所以$se = sq_me = tq_me = te$. 因此α是映射. 显然α还是S -满同态. 设$se = te$. 因为$e \in \langle M \rangle$, 所以$ex = x$, 因此$sx = sex = tex = tx$. 这说明α还是单同态. 所以有S -同构$Sx \simeq Se$, 从而Sx是投射的.

(1)⇒(2)设$q_0, q_1, \cdots \in S$, 满足$q_{i-1}q_i = q_i, i = 1, 2, \cdots$. 令$Q$是由$1, q_0, q_1, \cdots$生成的$S$的子半群. 如下定义$S$上的关系$\sigma$:

$$s\ \sigma\ t \Longleftrightarrow \text{存在 } p, q \in Q, r \in S, \text{使得 } s = rp, t = rq.$$

记λ为σ的传递包即$\lambda = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \sigma^n$. 容易证明$\lambda$是$S$上的左同余. 下面先证明$S/\lambda$是强平坦$S$ -系.

设 $u\lambda v$, 则存在 n', 使得 $u\sigma^{n'}v$. 所以存在 $u_1, \cdots, u_{n'-1}$, 使得 $u\sigma u_1\sigma u_2 \cdots \sigma u_{n'-1}\sigma v$. 因此存在$r_1, \cdots, r_{n'} \in S$, 使得:

$$\begin{aligned}
u &= r_1q_{j_1} \cdots q_{j_{n_1}}, & u_1 &= r_1q_{i_1} \cdots q_{i_{m_1}}, \\
u_1 &= r_2q_{k_1} \cdots q_{k_{n_2}}, & u_2 &= r_2q_{l_1} \cdots q_{l_{m_2}}, \\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\
u_{n'-1} &= r_{n'}q_{s_1} \cdots q_{s_{n_{n'}}}, & v &= r_{n'}q_{t_1} \cdots q_{t_{m_n}}.
\end{aligned}$$

这里带下标的$q \in \{q_0, q_1, \cdots\}$, 因为有$q_{i-1}q_i = q_i, i = 1, 2, \cdots$,所以还可以假定上述每个等式中$q$的下标是递减的(可以相等). 设在上述等式组中出现的q的最大下标为k, 用q_{k+1}右乘以上各式,可得:

$$uq_{k+1} = r_1q_{k+1} = u_1q_{k+1} = r_2q_{k+1} = \cdots = r_{n'}q_{k+1} = vq_{k+1}.$$

显然有$1\sigma q_{k+1}$, 所以$q_{k+1}\lambda 1$. 因此由命题5.1.2知S/λ是强平坦的.

由条件知S/λ是投射的, 所以存在$e \in E(S)$, 使得$Se \simeq S/\lambda$. 设$\beta : Se \to S/\lambda$是同构, $\beta(e) = \bar{r}, \beta(r'e) = \bar{1}, r, r' \in S$, 则$rr'e = r\beta^{-1}(\bar{1}) = \beta^{-1}(\bar{r}) = e$, 所以$r'err'er = r'er \in E(S)$. 令$f = r'er$, 作映射$\varphi : S/\lambda \to Sf$为: $\varphi(\bar{s}) = sf$. 若$\bar{s} = \bar{t}$, 则$sr'er = s\beta^{-1}(\bar{1})r = \beta^{-1}(\bar{s})r = \beta^{-1}(\bar{s})r = t\beta^{-1}(\bar{1})r = tr'er$, 所以$\varphi$是映射. 若$sf = tf$, 则$\bar{s} = s\bar{1} = s\beta(r'e) = sr'e\beta(e) = sr'e\bar{r} = \overline{sr'er} = \overline{sf} = \overline{tf} = tr'e\bar{r} = tr'e\beta(e) = t\beta(r'e) = t\bar{1} = \bar{t}$. 所以$\varphi$是单同态, 从而$\varphi : S/\lambda \to Sf$是同构,并且$\varphi(\bar{1}) = f$.

对任意$i = 0, 1, \cdots, q_i\lambda 1$, 所以$\overline{q_i} = \bar{1}$, 因此

$$f = \varphi(\bar{1}) = \varphi(\overline{q_i}) = q_if.$$

又因为$\varphi(\bar{f}) = \varphi(f\bar{1}) = f\varphi(\bar{1}) = ff = f = \varphi(\bar{1})$, 所以$\bar{f} = \bar{1}$. 从而$f\lambda 1$. 同前面的证明类似地可知存在$q_m$, 使得$fq_m = 1 \cdot q_m = q_m$. 所以对于$i = 0, 1, \cdots$,

$$q_iq_m = q_i(fq_m) = (q_if)q_m = fq_m = q_m,$$

即S满足条件(FP$_1$).

设$E(S)$的子集合M具有以下性质: 对任意$e_1, \cdots, e_n, f_1, \cdots, f_m \in M$, 存在$f \in M$满足$e_1 \cdots e_nf = f_1 \cdots f_mf$. 记$Q$为由$M \cup \{1\}$生成的$S$的子半群. 在$S$上定义关系$\sigma$如下:

$$s\sigma t \Leftrightarrow \text{存在 } p, q \in Q, r \in S, \text{ 使得 } s = rp, t = rq.$$

记λ为σ的传递包, 则λ是S上的左同余.下面证明S/λ是强平坦系.

设 u, $v \in S$ 满足$u\lambda v$, 则存在$u_1, \cdots, u_{n-1} \in S$, 使得$u = u_0\sigma u_1\sigma \cdots \sigma u_{n-1} \sigma u_n = v$. 对于$u_0\sigma u_1$, 存在$p, q \in Q, r \in S$, 使得$u_0 = rp, u_1 = rq$. 所以$u_0 = re_1 \cdots e_l$, $u_1 = rf_1 \cdots f_m$, 这里$e_1, \cdots, e_l, f_1, \cdots, f_m \in M, m, l \geqslant 0$. 由$M$的性质可知存在$g_1 \in M$, 使得$e_1 \cdots e_lg_1 = f_1 \cdots f_mg_1$. 所以

$$u_0g_1 = re_1 \cdots e_lg_1 = rf_1 \cdots f_mg_1 = u_1g_1,$$

$$\sigma u_2g_1\sigma \cdots \sigma u_{n-1}g_1\sigma u_ng_1,$$

这里利用了事实: $s\sigma t, g \in Q \Rightarrow sg\sigma tg$.

对于$u_1 g_1 \sigma u_2 g_1$, 类似于上面的讨论可知存在$g_2 \in M$, 使得:

$$u_0 g_1 g_2 = u_1 g_1 g_2 = u_2 g_1 g_2 \sigma u_3 g_1 g_2 \sigma \cdots \sigma u_n g_1 g_2.$$

继续上述过程可知存在$g_1, g_2, \cdots, g_n \in M$, 使得:

$$u_0 g_1 g_2 \cdots g_n = u_n g_1 g_2 \cdots g_n,$$

即$ug_1 \cdots g_n = vg_1 \cdots g_n$. 又由$\lambda$的定义容易证明$g_1 \cdots g_n \lambda 1$, 所以由命题5.1.2知$S/\lambda$是强平坦的.

由条件知S/λ是投射的, 所以类似于前面的证明可知存在$e \in E(S)$, 使得$\alpha : S/\lambda \to Se$是$S$ - 同构并且$\alpha(\overline{1}) = e$. 因为$\alpha(\overline{e}) = e\alpha(\overline{1}) = ee = e = \alpha(\overline{1})$, 所以$\overline{e} = \overline{1}$. 因此对任意$f \in M$, 有

$$e = \alpha(\overline{1}) = \alpha(\overline{f}) = f\alpha(\overline{1}) = fe.$$

由$e\lambda 1$可知存在$u_1, \cdots, u_{n-1} \in S$, 使得$e = u_0 \sigma u_1 \sigma \cdots \sigma u_{n-1} \sigma u_n = 1$. 类似于前面的证明可知存在$g_1, \cdots, g_n \in M$, 使得$eg_1 \cdots g_n = g_1 \cdots g_n$. 所以对任意$f \in M$,

$$\begin{aligned} fg_1 \cdots g_n &= f(eg_1 \cdots g_n) = (fe)g_1 \cdots g_n \\ &= eg_1 \cdots g_n = g_1 \cdots g_n. \end{aligned}$$

这说明$g_1 \cdots g_n \in \langle M \rangle$是$\langle M \rangle$中的右零元. 所以$S$满足条件($\mathrm{FP}_2$). □

在$E(S)$中规定如下的序:

$$e \leqslant f \Leftrightarrow e = ef = fe.$$

这个序称为S中幂等元的自然序.

由定理5.9.1可得:

推论 5.9.2 设所有循环强平坦S -系是投射的,则S中不包含幂等元对应于自然序的无限降链.

证明 由条件(FP_1)立得. □

推论 5.9.3 所有有限生成的强平坦S -系是投射的当且仅当所有循环的强平坦S -系是投射的.

证明 由命题4.2.8即得. □

推论 5.9.4 对于幺半群S,以下几条等价:

(1) 所有循环的强平坦系是自由的;

(2) 所有有限生成的强平坦系是自由的;

(3) S满足(FP_1), (FP_2), 并且对任意$e \in E(S)$, 有$e\mathscr{D}1$.

证明 由定理5.8.20和定理5.9.1即得. □

定理 5.9.5 对于幺半群S, 以下条件等价:

(1) 所有循环S -系是投射的;

(2) 所有循环S -系是强平坦的;

(3) 所有循环的挠自由S -系是投射的;

(4) 所有循环的挠自由S -系是强平坦的;

(5) $S=\{1\}$或$S=\{1,0\}$.

证明 由定理5.8.25和定理5.9.1即得. □

下面把利用循环系的性质对幺半群进行同调分类的有关结果也汇总成一个表. 该表选自文献[46].

是(满足) 所有循环的…S-系	自由	投射	强平坦	条件(P)	平坦	弱平坦	挠自由
投射	$\forall e=e^2$ $e\mathscr{D}1$ (5.8.20)						
强平坦	$e\mathscr{D}1$ $(\mathrm{FP}_1),(\mathrm{FP}_2)$ (5.9.4)	(FP_1), (FP_2) (5.9.1)					
条件(P)	$\{1\}$ (5.8.21)	$\forall x$是周期元 (FP_1), (FP_2) (5.1.5),(5.9.1)	$\forall x\in S$ x是周期元 (5.1.5)				
平坦	$\{1\}$	左谐零 (5.6.8)	左谐零	?			
弱平坦	$\{1\}$	左谐零	左谐零	?	?		
挠自由	$\{1\}$	$\{1\}\vee\{1,0\}$ (5.9.5)	$\{1\}\vee\{1,0\}$	?	?	?	
所有	$\{1\}$	$\{1\}\vee\{1,0\}$	$\{1\}\vee\{1,0\}$	$G\vee G^0$ (5.8.26)	?	正则且… (4.5.12)	左可消元是左可逆元 (5.8.18)

§5.10 Rees商系的平坦性

本节考虑Rees商系的平坦性,对这类特殊S -系的平坦性研究较为彻底,主要内容选自文献[23]、[141] 以及文献[205].

设I是幺半群S的左理想. 定理5.5.5给出了Rees商系S/λ_I平坦(弱平坦)的等价刻画. 本节先给出Rees商系S/λ_I具有主弱平坦性以及挠自由性的等价刻画.

命题 5.10.1 设I是S的左理想. S/λ_I是主弱平坦的当且仅当任意$x \in I$, 必有$x \in xI$.

证明 必要性 设$x \in I, y \in I$. 若$x = xy$,则结论成立.下设$x \neq xy$. 在$S \otimes S/\lambda_I$中显然有$x \otimes \bar{1} = 1 \otimes \bar{x} = 1 \otimes \overline{xy} = x \otimes \bar{y}$. 由于$S/\lambda_I$是主弱平坦的, 所以在$xS \otimes S/\lambda_I$中有$x \otimes \bar{1} = x \otimes \bar{y}$. 因此存在$s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$, 使得

$$
\begin{aligned}
& & \bar{1} &= \overline{s_1}, \\
xs_1 &= xt_1, & \overline{t_1} &= \overline{s_2}, \\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\
xs_n &= xt_n, & \overline{t_n} &= \bar{y}.
\end{aligned}
$$

记$1 = t_0, y = s_{n+1}$. 若对任意$i \in \{0, 1, \cdots, n\}$都有$t_i = s_{i+1}$, 则$x = xs_1 = xt_1 = xs_2 = \cdots = xs_n = xt_n = xy$,矛盾. 所以存在$i$, 使得$t_0 = s_1, \cdots, t_{i-1} = s_i$, 但$t_i \neq s_{i+1}$, 故$t_i, s_{i+1} \in I$. 因而$x = xs_1 = xt_1 = \cdots = xs_{i+1} = xt_{i+1}$. 由于$s_{i+1} \in I$, 所以$x \in xI$.

充分性 设 $u, v, x \in S$, 使得 $xu\lambda_I xv$. 如果 $xu = xv$, 那么显然$u\lambda_I u(\Delta x)v$, 即$u(\lambda_I \vee \Delta x)v$.如果$xu \neq xv$,由已知条件存在$p, q \in I$, 使得$xu = xup, xv = xvq$. 所以$u\lambda_I u(\Delta x)up\lambda_I vq(\Delta x)v$, 即$u(\lambda_I \vee \Delta x)v$, 故由命题5.8.2的(3)可得$S/\lambda_I$是主弱平坦的. □

命题 5.10.2 设I是S的左理想. S/λ_I是挠自由的当且仅当任意$x, c \in S$, c为左可消元,如果$cx \in I$, 则必有$x \in I$.

证明 必要性 设$x, c \in S$, c为左可消元,且$cx \in I$. 那么$ccx \in I$, 故$c[x] = [cx] = [ccx] = c[cx]$. 由假设知$[x] = [cx]$,故$x \in I$.

充分性 设$u, v, c \in S$, 使得$c[u] = c[v]$, 其中c为左可消元. 如果$cu = cv$, 显然$u = v$, 故$[u] = [v]$. 否则$cu, cv \in I$, 由已知条件有$u, v \in I$, 则$[u] = [v]$. □

引理 5.10.3 设S是幺半群. $I = \{s \in S \mid s$是非左可消元$\}$. 若I是非空集合, 则I是S的真左理想, 并且Rees商S -系S/λ_I是挠自由的.

证明 显然若I是非空集合，必为S的真左理想. 设c是S的左可消元，对任意的$s \in S$，如果$cs \in I$，则必有$s \in I$. 否则s是左可消元，故cs也是左可消元，这与$cs \in I$矛盾. 所以由命题5.10.2可知S/λ_I是挠自由的. □

引理 5.10.4 设S是带零的左可消幺半群，I是S的左理想，若Rees商S-系S/λ_I是挠自由的，那么$I = S$或者$|I| = 1$.

证明 设0是S的零元，由已知条件，仅需证明I不可能是S的元素个数大于1的真右理想，否则存在$0 \neq c \in I$，c是S的左可消元. 因为S/λ_I是挠自由的，由$c \cdot 1 \in I$推出$1 \in I$，矛盾. □

引理 5.10.5 设S是幺半群. 对一元左S-系Θ, 下述结论成立:

(1) Θ是主弱平坦的;

(2) Θ满足条件(P)当且仅当S的任意两个右理想有非空的交;

(3) Θ是强平坦的当且仅当任意的$s, t \in S$, 存在$u \in S$, 使得$su = tu$;

(4) Θ是平坦(弱平坦)的当且仅当S的任意两个右理想有非空的交;

(5) Θ是投射的当且仅当S包含右零元.

(6) Θ是自由的当且仅当S=$\{1\}$.

证明 (1),(2),(3) 由定义显然.

(4) 把Θ看成特殊的循环左S-系,由命题5.2.11易证结论成立.

(5) 把Θ看成特殊的循环左S-系,由命题5.8.2的(2)易证结论成立.

(6) 把Θ看成特殊的循环左S-系,由命题5.8.2的(1)易证结论成立. □

定理 5.10.6 所有主弱平坦的Rees商左S-系是平坦(弱平坦)的当且仅当S的任意两个右理想有非空的交.

证明 由定理5.5.5和引理5.10.5,显然. □

定义 5.10.7 设S是幺半群, $s \in S$,称s是右几乎正则的,如果存在$r, r_1, \cdots, r_m, s_1, \cdots, s_m \in S$以及左可消元$c_1, c_2, \cdots, c_m \in S$, 使得下述等式组成立:

$$
\begin{aligned}
c_1 s_1 &= r_1 s, \\
c_2 s_2 &= r_2 s_1, \\
&\cdots\cdots \\
c_m s_m &= r_m s_{m-1}, \\
s &= s r s_m.
\end{aligned}
$$

如果幺半群中每一个元素是右几乎正则的,则称幺半群是右几乎正则的.

定理 5.10.8 对于幺半群S, 以下几条等价:

(1) 所有挠自由的S-系是主弱平坦的;

(2) 所有挠自由的循环S-系是主弱平坦的;

(3) 所有挠自由的Rees商S-系是主弱平坦的;

(4) S是右几乎正则的.

证明 (1)⇒(2)⇒(3) 显然.

(3)⇒(4) 设所有挠自由的左Rees商S-系是主弱平坦的，任取$s\in S$,那么存在$t,r_1,\cdots,r_m,s_1,\cdots,s_{m-1}\in S$以及左可消元$c_1,c_2,\cdots,c_m\in S$, 使得下述等式组成立:

$$c_1s_1=r_1s,$$
$$c_2s_2=r_2s_1,$$
$$\cdots\cdots$$
$$c_mt=r_ms_{m-1}.$$

令K是使得上述等式组成立的元素t的集合, 由于$1s=1s$, 所以$s\in K$, 故$K\neq\emptyset$.

设I是由集合K生成的左理想, 即$I=\bigcup\limits_{t\in K}St$. 下证$S/\lambda_I$是挠自由的. 假设对$s'\in S$以及左可消元$c\in S$使得$cs'\in I$. 那么存在$t\in K$,使得$cs'\in St$. 因此存在$r_1,\cdots,r_m,r_{m+1},s_1,\cdots,s_{m-1}\in S$以及左可消元$c_1,c_2,\cdots,c_m\in S$, 使得下述等式组成立:

$$c_1s_1=r_1s,$$
$$c_2s_2=r_2s_1,$$
$$\cdots\cdots$$
$$c_mt=r_ms_{m-1},$$
$$cs'=r_{m+1}t.$$

这说明$s'\in K$, 故$s'\in I$. 由命题5.10.2知S/λ_I是挠自由的, 由假设S/λ_I是主弱平坦的,故由命题5.10.1, 对$s\in S$, 存在$t\in K$, $r\in S$使得$srt=s$. 故由$t\in K$及等式$srt=s$得s是右几乎正则的.

(4)⇒(1)设S是右几乎正则的,并且A为挠自由的左S-系. 若$a,a'\in A$, $s\in S$使得$sa=sa'$. 因为s是右几乎正则的,则存在$r,r_1,\cdots,r_m,s_1,\cdots,s_m\in S$以及左可消元$c_1,c_2,\cdots,c_m\in S$, 使得下述等式组成立:

$$c_1s_1=r_1s,$$
$$c_2s_2=r_2s_1,$$
$$\cdots\cdots$$
$$c_ms_m=r_ms_{m-1},$$
$$s=srs_m.$$

由第一个等式有$c_1s_1a = r_1sa = r_1sa' = c_1s_1a'$. 由$A$是挠自由的可得$s_1a = s_1a'$, 类似地可得$s_2a = s_2a', \cdots, s_ma = s_ma'$. 显然$rs_ma = rs_ma'$, 故

$$s \otimes a = srs_m \otimes a = s \otimes rs_ma = s \otimes rs_ma' = srs_m \otimes a' = s \otimes a'$$

在张量积$sS \otimes A$中成立, 即A是主弱平坦的. □

定理 5.10.9 对幺半群S, 以下几条等价:

(1) 所有挠自由的Rees商S-系是平坦的;

(2) 所有挠自由的Rees商S-系是弱平坦的;

(3) S是右几乎正则的, 并且S的任意两个右理想有非空的交.

证明 (1)⇒(2) 显然.

(2)⇒(3) 若所有挠自由的左Rees商S-系是弱平坦的, 则所有挠自由的左Rees商S-系是主弱平坦的, 由定理5.10.8可得S是右几乎正则的. 另一方面, 所有挠自由的左Rees商S-系是弱平坦的, 则所有主弱平坦的左Rees商S-系是弱平坦的, 由定理5.10.6得S的任意两个右理想有非空的交.

(3)⇒(1) 由定理5.10.6和定理5.10.8知结论显然. □

定理 5.10.10 对幺半群S, 以下两条等价:

(1) 所有挠自由的Rees商S-系满足条件(P);

(2) S是左可消幺半群, 并且S的任意两个右理想有非空的交; 或者S是带零的左可消幺半群.

证明 (1)⇒(2) 令$I = \{s \in S | s是非左可消元\}$, 则有以下两种情形:

(i) $I = \emptyset$. 此时 S 是左可消幺半群. 同时由 (1) 得所有主弱平坦的左 Rees 商S-系是平坦的, 由定理5.10.6可知S的任意两个右理想有非空的交.

(ii) $I \neq \emptyset$. 则由引理5.10.3知Rees商左S-系S/λ_I是挠自由的,利用命题5.5.1可得$|I| = 1$. 记$I = \{z\}$. 对任意的$x \in S$, 因为I是S的左理想, $xz \in I = \{z\}$, 即$xz = z$, 说明z是S的右零元.

令$K = \{s \in S | s$ 是 S 的右零元$\}$, 则K是S的左理想, 对任意的$t \in S$以及左可消元$c \in S$, 如果$ct \in I$, 因为ct是右零元, 所以$c \cdot t = c \cdot ct$, 但c是左可消元, 故$t = ct \in I$. 说明S/λ_I是挠自由的, 故S/λ_I满足条件(P). 由命题5.5.1可知$|I| = 1$. 这说明S只有唯一的右零元, 易证该唯一的右零元就是S的零元0. 令$C = S - \{0\}$,则C中的元均是左可消元. 对任意的$s, t \in C$, 必有$st \in C$. 否则,如果$st = 0$, 则$s \cdot t = 0 = s \cdot 0$可得$t = 0$,矛盾. 所以$C$是$S$的子半群. 故$S = C \cup \{0\}$.

(2)⇒(1) 设I是S的左理想并且S/λ_I是挠自由的.

如果S是左可消幺半群, 并且S的任意两个右理想有非空的交. 由于S是左可消幺半群, 必为右几乎正则的, 由定理5.10.8知S/λ_I是主弱平坦的. 因为S的任

意两个右理想有非空的交，由定理5.10.6得所有主弱平坦的左Rees商S -系是平坦(弱平坦)的. 最后由 S 是左可消幺半群以及定理 4.5.5 易证所有弱平坦的左S -系满足条件(P).

如果S是带零的左可消幺半群, 由于Rees商S -系S/λ_I是挠自由的, 由引理5.10.4可得$I = S$或者$|I| = 1$. 若$I = S$, 则$S/I = \Theta$, 由于S有零元, S的任意两个右理想有非空的交, 由引理5.10.5得一元左S -系Θ满足条件(P). 若$|I| = 1$, 则$S/I = S$, 结论显然. □

定理 5.10.11 设S是幺半群, 以下两条等价:

(1) 所有满足条件(P)的Rees商S -系是强平坦的;

(2) 如果S的任意两个右理想有非空的交, 则对任意的$s, t \in S$, 存在$u \in S$, 使得$su = tu$.

证明 (1)⇒(2) 若S的任意两个右理想有非空的交，由引理5.10.5知一元左S -系Θ满足条件(P), 由假设Θ是强平坦的, 由引理5.10.5知对任意的$s, t \in S$, 存在$u \in S$, 使得$su = tu$.

(2)⇒(1) 设I是S的左理想并且左Rees商S -系S/λ_I满足条件(P). 如果$I = S$, 显然$S/I \simeq \Theta$, 故由引理5.10.5可知S的任意两个右理想有非空的交, 由假设对任意的$s, t \in S$, 存在$u \in S$, 使得$su = tu$, 说明一元左S -系Θ也满足条件(E), 即$S/I \simeq \Theta$是强平坦的. 如果$I \neq S$, 则I是S的真左理想, 因为S/λ_I满足条件(P), 由命题5.5.1得$|I| = 1$. 说明$S/I \simeq S$, 此时显然S/λ_I是强平坦的. □

定理 5.10.12 对幺半群S, 以下两条等价:

(1) 所有挠自由的Rees商S -系是强平坦的;

(2) S是左可消幺半群，并且对任意的$s, t \in S$, 存在$u \in S$, 使得$su = tu$; 或者S是带零的左可消幺半群.

证明 (1)⇒(2) 所有挠自由的左Rees商S -系是强平坦的, 则所有挠自由的左Rees商S -系满足条件(P), 由定理5.10.10得S是左可消幺半群，并且S的任意两个右理想有非空的交；或者S是带零的左可消幺半群. 另一方面, 所有挠自由的左Rees商S -系是强平坦的, 则所有满足条件(P)的左Rees商S -系是强平坦的, 由定理5.10.11得对任意的$s, t \in S$, 存在$u \in S$, 使得$su = tu$.

(2)⇒(1) 仅需证S是属于前一种情形时结论成立. 如果对任意的$s, t \in S$, 存在$u \in S$, 使得$su = tu$, 则显然S的任意两个右理想有非空的交, 故由定理5.10.10和定理5.10.11易证结论成立. □

定理 5.10.13 对幺半群S, 以下两条等价:

(1) 所有挠自由的Rees商S -系是投射的;

(2) $S = \{1\}$; 或者S是带零的左可消幺半群.

证明 (1)⇒(2) 首先由假设及定理5.10.12可得S是左可消幺半群，并且对任意的$s,t \in S$, 存在$u \in S$, 使得$su = tu$; 或者S是带零的左可消幺半群. 对于前一种情形，因为此时一元左S-系Θ是投射的, 由命题5.8.2的(2)很容易证明S含有右零元, 记为r. 所以$r \cdot r = r \cdot 1$, 由左可消性得$r = 1$, 故$S = \{1\}$.

(2)⇒(1)显然. □

定理 5.10.14 对幺半群S, 以下两条等价:

(1) 所有Rees商S-系是挠自由的;

(2) S的每一个左可消元是左可逆元.

证明 (1)⇒(2) 设c是S的左可消元, 令$I = Sc$, 则左Rees商S-系S/λ_I是挠自由的. 因为$c \cdot 1 \in I$, 由命题5.10.2知$1 \in I$, 故c是左可逆元.

(2)⇒(1) 设I是S的左理想, $s, c \in S$, c为S的左可消元. 如果$cs \in I$, 则存在$i \in I$使得$cs = i$. 因为c为S的左可逆元, 那么$s = c^{-1}i \in I$, 由命题5.10.2知左Rees商S-系S/λ_I是挠自由的. □

定理 5.10.15 对幺半群S, 以下两条等价:

(1) 所有Rees商S-系是主弱平坦的;

(2) S是正则幺半群.

证明 由正则幺半群的定义, 定理5.11.1的证明以及命题5.10.1, 显然. □

定理 5.10.16 对幺半群S, 以下两条等价:

(1) 所有Rees商S-系满足条件(P);

(2) S是群或带零群.

证明 类似于定理5.5.3的证明. □

定理 5.10.17 对幺半群S, 以下几条等价:

(1) 所有Rees商S-系是投射的;

(2) 所有Rees商S-系是强平坦的;

(3) $S = \{1\}$或S是带零群.

证明 (1)⇒(2)显然.

(2)⇒(3) 由定理5.10.16可知S是群或带零群. 但一元左S-系Θ作为左Rees商S-系此时是强平坦的, 由引理5.10.5,对任意的$s,t \in S$, 存在$u \in S$, 使得$su = tu$. 此时群只能是平凡群,即$S = \{1\}$, 故结论成立.

(3)⇒(1) 当$S = \{1\}$时显然所有左Rees商S-系是投射的; 若S是带零群, 则S的左理想只能为$\{0\}$或者S, 故任意的左Rees商S-系要么是S, 要么是一元左S-系Θ, 由引理5.10.5知一定是投射的. □

定理 5.10.18 对幺半群S, 以下几条等价:

(1) 所有Rees商S-系是自由的;

(2) 所有挠自由的Rees商S -系是自由的;

(3) 所有主弱平坦的Rees商S -系是自由的;

(4) $S=\{1\}$.

证明 由引理5.10.5, 显然. □

定理 5.10.19 对幺半群S, 以下几条等价:

(1) 所有满足条件(P)的Rees商S -系是投射的;

(2) 如果S的任意两个右理想有非空的交, 则S包含右零元.

证明 (1)⇒(2) 如果S的任意两个右理想有非空的交, 则由引理5.10.5知一元左S -系Θ满足条件(P), 由(1)知Θ是投射的, 再次利用引理5.10.5可得S包含右零元.

(2)⇒(1) 设I是S的左理想并且左Rees商S -系S/λ_I满足条件(P). 若$I=S$, 那么$S/I\simeq\Theta$满足条件(P), 由引理5.10.5知S的任意两个右理想有非空的交, 由(2)得S包含右零元, 故由引理5.10.5知$S/I\simeq\Theta$是投射的; 若I是S的真左理想, 因为S/λ_I满足条件(P), 由命题5.5.1知$|I|=1$, 说明$S/\lambda_I\simeq S$显然是投射的. □

定理 5.10.20 对幺半群S, 以下几条等价:

(1) 所有满足条件(P)的Rees商S -系是自由的;

(2) 所有平坦的Rees商S -系是自由的;

(3) 所有弱平坦的Rees商S -系是自由的;

(4) 如果S的任意两个右理想有非空的交, 则$S=\{1\}$.

证明 (3)⇒(2)⇒(1) 显然.

(1)⇒(4)首先由定理5.10.19可知如果S的任意两个右理想有非空的交, 则S包含右零元. 其次, 由S包含右零元及引理5.10.5得一元左S -系Θ是投射的, 由(1)可知Θ是自由的, 再次由引理5.10.5可得$S=\{1\}$.

(4)⇒(3)设I是S的左理想并且左Rees商S -系S/λ_I是弱平坦的. 由定理5.5.5知S的任意两个右理想有非空的交, 由(4)得$S=\{1\}$, 显然S/λ_I是自由的. □

定理 5.10.21 对幺半群S, 以下两条等价:

(1) 所有强平坦的Rees商S -系是自由的;

(2) 如果对任意的$s,t\in S$, 存在$u\in S$, 使得$su=tu$, 那么$S=\{1\}$.

证明 (1)⇒(2) 如果对任意的$s,t\in S$, 存在$u\in S$, 使得$su=tu$, 那么由引理5.10.5可知一元左S -系Θ是强平坦的, 由(1)得Θ是自由的, 最后由引理5.10.5得$S=\{1\}$.

(2)⇒(1) 设I是S的左理想并且左Rees商S -系S/λ_I是强平坦的. 若$I=S$, 那么$S/I\simeq\Theta$是强平坦的, 由引理5.10.5知对任意的$s,t\in S$, 存在$u\in S$, 使得$su=tu$, 由(2)得$S=\{1\}$, 故由引理5.10.5知$S/I\simeq\Theta$是自由的; 若I是S的真

左理想, 因为S/λ_I是强平坦的, 由命题5.5.1知$|I|=1$, 说明$S/\lambda_I \simeq S$显然是自由的. □

定理 5.10.22 对幺半群S, 以下两条等价:

(1) 所有强平坦的Rees商S -系是投射的;

(2) 如果对任意的$s,t \in S$, 存在$u \in S$, 使得$su=tu$, 那么S包含右零元.

证明 (1)⇒(2) 如果对任意的$s,t \in S$, 存在$u \in S$, 使得$su=tu$, 那么由引理5.10.5可知一元左S -系Θ是强平坦的, 由(1)得Θ是投射的, 最后由引理5.10.5得S包含右零元.

(2)⇒(1) 设I是S的左理想并且左Rees商S -系S/λ_I是强平坦的. 若$I=S$, 那么$S/I \simeq \Theta$是强平坦的, 由引理5.10.5知对任意的$s,t \in S$, 存在$u \in S$, 使得$su=tu$, 由(2)得S包含右零元, 故由引理5.10.5知$S/I \simeq \Theta$是投射的; 若I是S的真左理想, 因为S/λ_I是强平坦的, 由命题5.5.1知$|I|=1$, 说明$S/\lambda_I \simeq S$显然是投射的. □

定理 5.10.23 对幺半群S, 以下两条等价:

(1) 所有投射的Rees商S -系是自由的;

(2) 如果S包含右零元, 那么$S=\{1\}$.

证明 类似于定理5.10.21的证明. □

下面为了叙述方便, 定义所谓的条件(*): S中没有元素个数大于1的真左理想I, 使得任意$x \in I$, 有$x \in xI$.

定理 5.10.24 对幺半群S, 以下两条等价:

(1) 所有主弱平坦的Rees商S -系满足条件(P);

(2) S的任意两个右理想有非空的交, 并且满足条件(*).

证明 (1)⇒(2) 由定理5.10.6可知S的任意两个右理想有非空的交. 反设I是S的元素个数大于1真左理想并且满足: 任意$x \in I$, 必有$x \in xI$. 那么由命题5.10.1知S/λ_I是主弱平坦的, 由(1)得S/λ_I满足条件(P), 故由命题5.5.1知$|I|=1$, 这与元素个数大于1的条件矛盾.

(2)⇒(1) 设I是S的左理想并且左Rees商S -系S/λ_I是主弱平坦的. 则I必不是S的元素个数大于1的真左理想, 否则由S/λ_I是主弱平坦的以及5.10.1可知任意$x \in I$, 必有$x \in xI$, 这将与条件(*)矛盾. 这说明要么$I=S$, 要么$|I|=1$. 若$I=S$, 那么$S/I \simeq \Theta$是主弱平坦的, 而S的任意两个右理想有非空的交, 由引理5.10.5知$S/I \simeq \Theta$满足条件(P); 若$|I|=1$, 则$S/\lambda_I \simeq S$显然满足条件(P). □

采用同样的方法, 完全类似地可以证明以下的结论, 其证明读者可以自行写出, 这里不再重复.

定理 5.10.25 对幺半群S, 以下两条等价:

(1) 所有主弱平坦的Rees商S -系是强平坦的;

(2) S满足条件$(*)$并且对任意的$s, t \in S$, 存在$u \in S$, 使得$su = tu$.

定理 5.10.26 对幺半群S, 以下两条等价:

(1) 所有主弱平坦的Rees商S -系是投射的;

(2) S满足条件$(*)$并且存在右零元.

定理 5.10.27 对幺半群S, 以下几条等价:

(1) 所有平坦的Rees商S -系是投射的;

(2) 所有弱平坦的左Rees商S -系是投射的;

(3) 如果S的任意两个右理想有非空的交,则S满足条件$(*)$并且存在右零元.

定理 5.10.28 对幺半群S, 以下几条等价:

(1) 所有平坦的Rees商S -系是强平坦的;

(2) 所有弱平坦的左Rees商S -系是强平坦的;

(3) 如果S的任意两个右理想有非空的交,则S满足条件$(*)$并且对任意的$s, t \in S$, 存在$u \in S$, 使得$su = tu$.

定理 5.10.29 对幺半群S, 以下几条等价:

(1) 所有平坦的Rees商S -系满足条件(P);

(2) 所有弱平坦的Rees商S -系满足条件(P);

(3) 如果S的任意两个右理想有非空的交,则S满足条件$(*)$.

定理 5.10.30 对幺半群S, 以下几条等价:

(1) 所有Rees商S -系是平坦的;

(2) 所有Rees商S -系是弱平坦的;

(3) S正则幺半群,并且S的任意两个右理想有非空的交.

下面我们把利用Rees商系的性质对幺半群进行同调分类的有关结果也汇总成一个表. 该表选自文献[23]. 由于Rees商系的平坦性和弱平坦性等价, 故表中只列出了平坦性.

是(满足) 所有Rees商左 S-系	自由	投射	强平坦	条件(P)	平坦	主弱平坦	挠自由
投射	S存在右零元$\Longrightarrow$ $S=\{1\}$ (5.10.23)						
强平坦	R.c.$\Longrightarrow$ $S=\{1\}$ (5.10.21)	R.c.$\Longrightarrow S$中存在右零元 (5.10.22)					
条件(P)	L.r.$\Longrightarrow$ $S=\{1\}$ (5.10.20)	L.r.$\Longrightarrow S$中存在右零元 (5.10.19)	L.r.$\Longrightarrow$R.c. (5.10.11)				
平坦	L.r.$\Longrightarrow$ $S=\{1\}$ (5.10.20)	L.r.$\Longrightarrow$ (*) 并且S中存在右零元 (5.10.27)	L.r.$\Longrightarrow$ (*) 并且R.c. (5.10.28)	L.r.$\Longrightarrow$ (*) (5.10.29)			
主弱平坦	{1} (5.10.18)	(*)并且S存在右零元 (5.10.26)	(*)并且R.c. (5.10.25)	(*)并且R.c. (5.10.24)	L.r. (5.10.6)		
挠自由	{1} (5.10.18)	{1}或者C^0 (5.10.17)	C并且R.c. 或者C^0 (5.10.12)	C并且L.r. 或者C^0 (5.10.10)	L.r.并且 R.a. (5.10.9)	R.a. (5.10.8)	
所有	{1} (5.10.18)	{1}或者G^0 (5.10.17)	{1}或者G^0 (5.10.17)	G或者G^0 (5.10.16)	Reg.并且 L.r. (5.10.30)	Reg. (5.10.15)	S中每一个左可消元是左可逆元 (5.10.14)

记号如下:

L.r.表示S的任意两个右理想有非空的交

R.c.表示S满足条件:任意$s, t \in S$, 存在$u \in S$, 使得$su = tu$

(*)表示S中没有元素个数大于1的真左理想I, 满足:

　对任意的$i \in I$, 存在$j \in I$, 使得$i = ij$

R.a.表示S是右几乎正则的

Reg.表示S是正则的

C表示S是左可消的

G表示S是群

§5.11　条件(E)与正则幺半群

本节讨论条件(E)对幺半群的刻画问题, 特别地利用条件(E)给出了正则幺半群的S -系范畴特征. 其主要结果选自于文献[171].

众所周知, 环R是正则的当且仅当所有左R-模是平坦的. 但下面的定理表明, 对于幺半群, 类似的结果不成立. 只能证明幺半群S是正则的当且仅当所有满足条件(E)的左S -系是平坦的.

定理 5.11.1　对于幺半群S, 以下几条等价:

(1) 所有满足条件(E)的S -系是平坦的;

(2) 所有满足条件(E)的S -系是弱平坦的;

(3) 所有满足条件(E)的S -系是主弱平坦的;

(4) S是正则幺半群.

证明　(1)$\Rightarrow$(2)$\Rightarrow$(3)是显然的.

(3)$\Rightarrow$(4)设$x \in S$. 如果$Sx = S$, 则x是左可逆元, 所以是正则元. 设$Sx \neq S$, 则Sx是S的真左理想. 由命题5.2.1知$A(Sx)$满足条件(E), 因此由条件知$A(Sx)$是

主弱平坦S -系. 由命题5.2.2知对任意$y \in Sx$, 有$y \in ySx$. 特别地$x \in xSx$, 即x是正则元. 所以S是正则幺半群.

(4)⇒(1) 设B是任意满足条件(E)的左S -系. 要证明B是平坦的.

设A是右S -系, $a, a' \in A, b, b' \in B$, 在$A \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$, 则存在$a_1, \cdots, a_n \in A, b_2, \cdots, b_n \in B$, $s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$, 使得:

$$\begin{aligned} &a = a_1 s_1, \\ &a_1 t_1 = a_2 s_2, \qquad s_1 b = t_1 b_2, \\ &\quad \cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots \\ &a_n t_n = a', \qquad s_n b_n = t_n b'. \end{aligned}$$

下面对n用数学归纳法证明在$(aS \cup a'S) \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$.

设$n = 1$, 此时有

$$\begin{aligned} &a = a_1 s_1, \\ &a_1 t_1 = a', \qquad s_1 b = t_1 b'. \end{aligned}$$

由条件知s_1是正则元, 所以存在$s_1' \in S$, 使得$s_1 = s_1 s_1' s_1$. 因此$t_1 b' = s_1 b = s_1 s_1' s_1 b = s_1 s_1' t_1 b'$. 由于$B$满足条件(E), 所以存在$u \in S, b'' \in B$, 使得:

$$t_1 u = s_1 s_1' t_1 u, \quad b' = ub''.$$

因此, $as_1' t_1 u = a_1 s_1 s_1' t_1 u = a_1 t_1 u = a' u$. 所以在$(aS \cup a'S) \otimes B$中有:

$$\begin{aligned} a \otimes b &= a_1 s_1 \otimes b = a_1 s_1 s_1' s_1 \otimes b = a_1 s_1 s_1' \otimes s_1 b \\ &= as_1' \otimes s_1 b = as_1' \otimes t_1 b' = as_1' \otimes t_1 ub'' \\ &= as_1' t_1 u \otimes b'' = a' u \otimes b'' = a' \otimes ub'' \\ &= a' \otimes b'. \end{aligned}$$

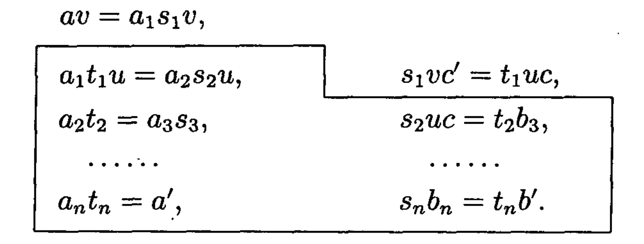
设$n \geqslant 2$. 由条件知存在$s_1', t_1' \in S$, 使得$s_1 = s_1 s_1' s_1, t_1 = t_1 t_1' t_1$. 因此由$s_1 b = t_1 b_2$可得:

$$\begin{aligned} t_1 b_2 &= s_1 b = s_1 s_1' s_1 b = s_1 s_1' t_1 b_2, \\ s_1 b &= t_1 b_2 = t_1 t_1' t_1 b_2 = t_1 t_1' s_1 b. \end{aligned}$$

由于B满足条件(E), 所以存在$u, v \in S, c, c' \in B$, 使得

$$\begin{aligned} &t_1 u = s_1 s_1' t_1 u, \qquad b_2 = uc, \\ &s_1 v = t_1 t_1' s_1 v, \qquad b = vc'. \end{aligned}$$

因此$s_1 vc' = s_1 b = t_1 b_2 = t_1 uc$. 所以有如下的等式组:



$$av = a_1s_1v,$$

$$\begin{array}{ll} a_1t_1u = a_2s_2u, & s_1vc' = t_1uc, \\ a_2t_2 = a_3s_3, & s_2uc = t_2b_3, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_nt_n = a', & s_nb_n = t_nb'. \end{array}$$

对于框线以内的等式组,由归纳假定可知在$(a_1t_1uS \cup a'S) \otimes B$中有$a_1t_1u \otimes c' = a' \otimes b'$. 又因为

$$a_1t_1u = a_1s_1s_1't_1u = as_1't_1u \in aS,$$

所以在$(aS \cup a'S) \otimes B$中有$a_1t_1u \otimes c = a' \otimes b'$.

对前两行等式组利用归纳假定可知, 在$(avS \cup a_2s_2uS) \otimes B$中有$av \otimes c' = a_2s_2u \otimes c$. 所以在$(aS \cup a'S) \otimes B$中有:

$$a \otimes b = a \otimes vc' = av \otimes c' = a_2s_2u \otimes c = a_1t_1u \otimes c = a' \otimes b'.$$

因此由数学归纳法原理即知B是平坦S -系. □

定理 5.11.2 对于幺半群S, 以下几条等价:

(1) 所有满足条件(E)的S -系满足条件(P);

(2) 所有满足条件(E)的S -系是强平坦的;

(3) 所有满足条件(E)的S -系是投射的;

(4) 所有满足条件(E)的S -系是自由的;

(5) S是群.

证明 (4)⇒(3)⇒(2)⇒(1)是显然的.

(1)⇒(5) 由命题5.2.1即得.

(5)⇒(4) 设S是群,则易证明所有S -系都是循环子系的不交并.若A是满足条件(E)的循环S -系,则$A \simeq S$.因此所有满足条件(E)的S -系都是自由的. □

下面的结果已出现在定理4.5.12中, 为了本节的完善, 仍将其列出.

定理 5.11.3 对于幺半群S, 以下两条等价:

(1) 所有满足条件(E)的S -系是挠自由的;

(2) S中的左可消元是左可逆元.

定理5.11.1完全刻画了所有满足条件(E)的S -系是平坦系的幺半群. 由定理4.3.16及例4.3.18知平坦系可以不满足条件(E). 因此平坦性与条件(E)是两个不能比较的性质. 如何刻画所有平坦系都满足条件(E)的幺半群, 至今仍是一个没有解决的问题.

§5.12 左完全幺半群

本节讨论所有强平坦左S -系都是投射系的幺半群,称之为左完全幺半群. 本节主要结果选自文献[174].

类似于左完全环的定义(Bass, 1960), 自然地可以把使得所有平坦左S -系都是投射系的幺半群S定义为左完全幺半群. 但是, 由定理5.2.8可知, 如果所有平坦左S -系都是强平坦的, 则$S = \{1\}$. 因此上述意义下的左完全幺半群只能是平凡的. 所以只能采取另外的方式定义左完全幺半群.

定义 5.12.1 称S是左完全幺半群, 如果所有强平坦左S -系都是投射的.

关于左完全幺半群,在文献[117]和[82]中已有大量的讨论. 例如,文献[82]中证明了若S是左完全幺半群, 则S的主右理想满足降链条件.

在环理论中, 有著名的Björk定理: 设R是环, 若右R-模M关于循环子模满足降链条件, 则M关于有限生成子模满足降链条件. 对于幺半群,有类似的结果:

定理 5.12.2 设右S -系A关于循环子系满足降链条件, 则A关于有限生成子系满足降链条件.

证明 令

$$\mathscr{A} = \{B \leqslant A | B\text{关于有限生成子系满足降链条件}\}.$$

由条件可知, A的所有循环子系中一定有极小的, 设其为B_0. 显然, $B_0 \in \mathscr{A}$, 故$\mathscr{A} \neq \varnothing$. 设$\mathscr{A}$中有升链: $B_1 \leqslant B_2 \leqslant \cdots$. 令$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. 下证$B \in \mathscr{A}$. 设$C$是$B$的有限生成子系, 则存在$B_i$, 使得$C \leqslant B_i$,设

$$C_1 \geqslant C_2 \geqslant \cdots \tag{5.12.1}$$

是B中的有限生成子系的降链, 则它也是某个B_i的有限生成子系的降链. 由于$B_i \in \mathscr{A}$, 所以式(5.12.1)是稳定的. 即B关于有限生成子系满足降链条件, 从而$B \in \mathscr{A}$.

因此, 由Zorn引理, A中有极大元, 设其为B. 若$B = A$, 则证明完成,下设$B \neq A$.

因为$B \neq A$, 所以存在$a \in A$, 使得$aS \nsubseteq B$. 由条件可取$a_0 \in A$, 使得$a_0S \nsubseteq B$并且a_0S是具此性质的循环子系中的极小者. 令$M = B \cup a_0S$. 下证$M \in A$, 从而与B在$\mathscr{A}$中的极大性发生矛盾.

设M中有有限生成子系的降链:

$$M_1 \geqslant M_2 \geqslant \cdots \geqslant M_n \geqslant \cdots , \tag{5.12.2}$$

如果$M_n \leqslant B$, 则关于任意$t \geqslant n, M_t \leqslant B$. 故降链式(5.12.2)是稳定的. 因此假定对于任意自然数$n, M_n \nsubseteq B$. 用数学归纳法证明下述事实:

$$M_n = B_n \cup a_0 S,\ B_n\text{是有限生成的,且}$$
$$B_{n+1} \leqslant B_n \leqslant B, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{5.12.3}$$

设$n = 1$,假定$u_1, \cdots, u_m$是M_1的生成元. 设$u_j \notin B$, 则$u_j \in a_0 S$, 从而$u_j S \subseteq a_0 S$. 又$u_j S \nsubseteq B$, 所以由$a_0 S$的极小性可知$u_j S = a_0 S$. 所以有:

$$M_1 = \bigcup_{j=1}^{m} u_j S = (\bigcup_{u_j \in B} u_j S) \cup (\bigcup_{u_j \notin B} u_j S)$$
$$= B_1 \cup (\bigcup_{u_j \notin B} u_j S) = B_1 \cup a_0 S,$$

这里$B_1 = \bigcup\limits_{u_j \in B} u_j S \subseteq B$是有限生成的.

设$n > 1$. 假定$u_1, \cdots, u_m$是M_n的生成元. 因为$M_n \leqslant M_{n-1} = B_{n-1} \cup a_0 S$, 所以$u_j \in B_{n-1}$, 或者$u_j \in a_0 S, j = 1, 2, \cdots, m$. 令$\Delta = \{j | u_j \in B_{n-1}\}, \Delta' = \{1, \cdots, m\} - \Delta$, 再令$B_n = \bigcup\limits_{j \in \Delta} u_j S$, 则$B_n \leqslant B_{n-1}$并且是有限生成的. 对于$j \in \Delta', u_j \notin B_{n-1}$, 所以$u_j \in a_0 S$, 故$u_j S \subseteq a_0 S$. 又存在$j$使得$u_j S \nsubseteq B$(否则, 所有的$u_j \in B$, 从而$M_n \leqslant B$,矛盾). 利用$a_0 S$的极小性可知$u_j S = a_0 S$. 所以$M_n = B_n \cup (\bigcup\limits_{u_j \in \Delta'} u_j S) = B_n \cup a_0 S$.

所以事实式(5.12.3)成立. 因此得到了B的有限生成子系的降链$B_1 \geqslant B_2 \geqslant \cdots \geqslant B_n \geqslant \cdots$. 因为$B \in \mathscr{A}$, 故存在$n$使得$B_n = B_{n+k}, k \geqslant 0$. 所以$M_{n+k} = B_{n+k} \cup a_0 S = B_n \cup a_0 S = M_n, k \geqslant 0$. 这说明降链式(5.12.2)是稳定的. 故$M \in \mathscr{A}$. □

对于左完全幺半群有

定理 5.12.3 设S是左完全幺半群, A是任意右S-系, 则A关于有限生成子系满足降链条件.

证明 设S是左完全幺半群, 则S关于主右理想满足降链条件. 设A是右S-系, $a, b \in A$. 若$aS \subseteq bS$, 则存在$s \in S$,使得$aS = bsS$. 因此A中的任意循环子系的降链具有如下形式:

$$aS \geqslant as_1 S \geqslant as_1 s_2 S \geqslant \cdots. \tag{5.12.4}$$

考虑S中的如下降链:

$$S \geqslant s_1 S \geqslant s_1 s_2 S \geqslant \cdots,$$

它是稳定的, 所以降链式(5.12.4)也是稳定的. 即A关于循环子系满足降链条件. 由定理5.12.2即得结论. □

设S是左完全幺半群, A是左S -系, 为了研究A关于子系的升链条件,从下述构造开始.

设$n_1, \cdots, n_k, \cdots$都是自然数, 令$\Gamma_k = \{1, \cdots, n_k\}$,设$\alpha_k$是从$\Gamma_k$到$\Gamma_{k+1}$的映射, 关于任意$k$和任意$j \in \Gamma_k$, 取定$S$中的元素$w_{jk}$, 以符号$x_{11}, x_{21}, \cdots, x_{n_1 1}, x_{12}, x_{22}, \cdots, x_{n_2 2}, \cdots$为基作自由左$S$ -系F.令

$$H = \{(x_{ik}, w_{ik}x_{\alpha_k(i),k+1}) | i \in \Gamma_k, k = 1, 2, \cdots\},$$

设ρ是由H生成的F上的同余. 记$G = F/\rho$.

引理 5.12.4 设$s, t \in S, \rho$如前面的定义. 若$sx_{ik}\rho tx_{jl}$, 则存在自然数h, p, q, 使得

$$sw_{ik}w_{i_1,k+1}, \cdots w_{i_p,h} = tw_{jl}w_{j_1,l+1} \cdots w_{j_q,h},$$

这里$k + p = h = l + q, i_1 = \alpha_k(i), i_2 = \alpha_{k+1}(i_1), \cdots, i_p = \alpha_{h-1}(i_{p-1}), j_1 = \alpha_l(j), j_2 = \alpha_{l+1}(j_1), \cdots, j_q = \alpha_{h-1}(j_{q-1})$,并且$\alpha_h(i_p) = \alpha_h(j_q)$.

证明 由$sx_{ik}\rho tx_{jl}$知$sx_{ik} = tx_{jl}$或者存在$t_1, \cdots, t_m \in S, (c_1, d_1), \cdots, (c_m, d_m) \in H \cup H^{-1}$,使得:

$$sx_{ik} = t_1c_1, t_1d_1 = t_2c_2, \cdots, t_md_m = tx_{jl}. \tag{5.12.5}$$

若$sx_{ik} = tx_{jl}$, 则结论自然成立.以下假定$sx_{ik} \neq tx_{jl}$.

为了方便, 称等式$t_pd_p = t_{p+1}c_{p+1}$中出现的基x_{uv}的第二下标v为此等式的第二下标.

若$m = 1$,则式(5.12.5)变为

$$sx_{ik} = t_1c_1, \quad t_1d_1 = tx_{jl}. \tag{5.12.6}$$

不妨假定$k \leqslant l$. 此时$c_1 = x_{ik}$或者$c_1 = w_{i',k-1}x_{ik}$, 对应地$d_1 = w_{ik}x_{\alpha_k(i),k+1}$, 或者$d_1 = x_{i',k-1}$, 这里$i'$满足$\alpha_{k-1}(i') = i$. 若后者成立, 则$l = k - 1$, 矛盾. 所以$c_1 = x_{ik}, d_1 = w_{ik}x_{\alpha_k(i),k+1}$. 因此由式(5.12.6)知$s = t_1, t_1w_{ik} = t, k + 1 = l, j = \alpha_k(i)$. 所以$sw_{ik} = t$, 因此$sw_{ik}w_{i_1,k+1} = tw_{i_1,k+1} = tw_{jl}$.结论成立.

设$m > 1$. 设在式(5.12.5)中有如下的一段等式组:

$$\begin{aligned}&t_pd_p = t_{p+1}c_{p+1}, \cdots, t_{p+q}d_{p+q} = t_{p+q+1}c_{p+q+1},\\ &\cdots, t_{p+2q}d_{p+2q} = t_{p+2q+1}c_{p+2q+1},\end{aligned} \tag{5.12.7}$$

其中每个等式的第二下标依次是:

$$h, h-1, \cdots, h-q+1, h-q, h-q+1, \cdots, h-1, h.$$

对q用数学归纳法容易证明,等式组(5.12.7)可用如下的等式来代替:

$$t_pd_p = t_{p+2q+1}c_{p+2q+1}. \tag{5.12.8}$$

设等式组(5.12.5)中所有等式的第二下标中最大者为h, 假定式(5.12.5)中有如下的两个等式:

$$t_pd_p = t_{p+1}c_{p+1}, \quad t_qd_q = t_{q+1}c_{q+1}, \tag{5.12.9}$$

其第二下标均达到h, 并且这两个等式中间再没有第二下标达到h的等式. 不妨设$p < q$. 因为式(5.12.5)中各等式的第二下标的变化规律是增加1或减少1, 所以式(5.12.5)中位于式(5.12.9)中两个等式中间的所有等式的第二下标均小于h, 并且其变化规律是从h开始依次递减到某一程度后再依次递增, 以及此规律的若干次复合. 应用结论式(5.12.8)可知$t_pd_p = t_{q+1}c_{q+1}$. 因此可以假定第二下标达到h的等式只有一个:

$$t_pd_p = t_{p+1}c_{p+1}, \tag{5.12.10}$$

考虑式(5.12.1)中从$sx_{ik} = t_1c_1$到式(5.12.10)的这一段. 应用结论式(5.12.8)将具有式(5.12.7)形式的等式组简化, 可以假定该段为:

$$\begin{aligned}
&sx_{ik} = t_1x_{ik},\\
&t_1w_{ik}x_{i_1,k+1} = t_2x_{i_1,k+1},\\
&\qquad\cdots\cdots\\
&t_{p-1}w_{i_{p-2},k+p-2}x_{i_{p-1},k+p-1} = t_px_{i_{p-1},k+p-1},\\
&t_pw_{i_{p-1},k+p-1}x_{i_p,k+p} = t_{p+1}w_{u,k+p-1}x_{i_p,k+p},
\end{aligned}$$

这里$k+p=h, i_1 = \alpha_k(i), \cdots, i_{p-1} = \alpha_{k+p-2}(i_{p-2}), i_p = \alpha_{k+p-1}(i_{p-1}) = \alpha_{k+p-1}(u)$, 所以有

$$\begin{aligned}
t_{p+1}w_{u,k+p-1} &= t_pw_{i_{p-1},k+p-1}\\
&=t_{p-1}w_{i_{p-2},k+p-2}w_{i_{p-1},k+p-1}\\
&=\cdots = t_1w_{ik}w_{i_1,k+1}\cdots w_{i_{p-1},k+p-1}\\
&=sw_{ik}w_{i_1,k+1}\cdots w_{i_{p-1},k+p-1}.
\end{aligned} \tag{5.12.11}$$

考虑式(5.12.5)中从式(5.12.10)到$t_md_m = tx_{jl}$这一段. 类似于前一段的讨论可知

$$t_pw_{i_{p-1},k+p-1} = tw_{jl}w_{j_1,l+1}\cdots w_{j_{q-1},l+q-1}, \tag{5.12.12}$$

这里$l+q=h, j_1 = \alpha_l(j), \cdots, j_{q-1} = \alpha_{l+q-2}(j_{q-2}) = u, \alpha_{l+q-1}(j_{q-1}) = \alpha_{l+q-1}(i_{p-1})$. 所以由式(5.12.11),式(5.12.12)和$t_pw_{i_{p-1},k+p-1} = t_{p+1}w_{u,k+p-1}$得

$$sw_{ik}w_{i_1,k+1}\cdots w_{i_{p-1},k+p-1} = tw_{jl}w_{j_1,l+1}\cdots w_{j_{q-1},l+q-1}.$$

引理证毕. □

引理 5.12.5 $G = F/\rho$是强平坦左S-系.

证明 设$s, t \in S, x_{ik}, x_{jl} \in F$, 使得$s\overline{x_{ik}} = t\overline{x_{jl}}$. 则$sx_{ik}\rho tx_{jl}$. 由引理5.12.4知有如下等式:

$$sw_{ik}\cdots w_{i_p,h} = tw_{jl}\cdots w_{j_q,h}, \quad \alpha_h(i_p) = \alpha_h(j_q).$$

令$u = w_{ik}\cdots w_{i_p,h}, v = w_{jl}\cdots w_{j_q,h}$, 则$su = tv$, 并且

$$\begin{aligned}\overline{x_{ik}} &= \overline{w_{ik}x_{i_1,k+1}} = w_{ik}\overline{x_{i_1,k+1}} = \cdots \\ &= w_{ik}w_{i_1,k+1}\cdots w_{i_p,h}\overline{x_{\alpha_h(i_p),h+1}} = u\overline{x_{\alpha_h(i_p),h+1}}, \\ \overline{x_{jl}} &= \overline{w_{jl}x_{j_1,l+1}} = w_{jl}\overline{x_{j_1,l+1}} = \cdots \\ &= w_{jl}w_{j_1,l+1}\cdots w_{j_q,h}\overline{x_{\alpha_h(j_q),h+1}} = v\overline{x_{\alpha_h(j_q),h+1}}.\end{aligned}$$

这说明G满足条件(P). 同理可证G满足条件(E). 故G是强平坦左S-系. □

引理 5.12.6 设有自然数n使得$n_k \leqslant n, k = 1, 2, \cdots$, 如果$G$是投射的, 则$G$是有限生成的.

证明 设$G \simeq \coprod_{i\in I} Se_i, e_i \in E(S), i \in I$. 为了方便,假定$G = \coprod_{i\in I} Se_i, e_i \in E(S), i \in I$. 对于$k = 2, 3, \cdots$, 令$\Delta_k = \Gamma_k - \mathrm{Im}\alpha_{k-1}$. 设$\Delta_k \neq \varnothing$.对于$j \in \Delta_k$, 称$j$ 是可连接的, 如果存在$i \in \mathrm{Im}\alpha_{k-1}$,使得:

$$\begin{aligned}\overline{x_{jk}} &= w_{jk}w_{j_1,k+1}\cdots w_{j_q,k+q}\overline{x_{v,k+q+1}}, \\ \overline{x_{ik}} &= w_{ik}w_{i_1,k+1}\cdots w_{i_q,k+q}\overline{x_{v,k+q+1}},\end{aligned}$$

这里$j_1, \cdots, j_q, i_1, \cdots, i_q$的定义同前, $v = \alpha_{k+q}(j_q) = \alpha_{k+q}(i_q)$. 记$\Delta_k'' = \{j \in \Delta_k \mid j$是可连接的$\}, \Delta_k' = \Delta_k - \Delta_k'', \Delta = \bigcup_{k=2}^{\infty}\Delta_k'$. 断言

$$|\Delta| < \infty. \tag{5.12.13}$$

假若不然, 则对于任意自然数m, $|\Delta| \geqslant m$. 设$j_1 \in \Delta_{k_1}', \cdots, j_m \in \Delta_{k_m}'$. 注意到每个$\Delta_k'$若非空, 则必有限, 故还可以假定$k_1 < k_2 < \cdots < k_m$. 令$k_0 = k_m + 1$. 对任意的$i = 1, 2, \cdots, m$, 有

$$\begin{aligned}\overline{x_{j_i,k_i}} &= w_{j_i,k_i}\overline{x_{j_i(1),k_i+1}} = \cdots \\ &= w_{j_i,k_i}w_{j_i(1),k_i+1}\cdots w_{j_i(u_i),k_i+u_i}\overline{x_{j_i(u_i+1),k_i+u_i+1}},\end{aligned} \tag{5.12.14}$$

这里$j_i(1) = \alpha_{k_i(j_i)}, \cdots, j_i(u_i+1) = \alpha_{k_i+u_i}(j_i(u_i))$, 并且$k_i + u_i + 1 = k_0, i = 1, \cdots, m$.

显然可以取$m > n$. 因为$j_1(u_1+1), \cdots, j_m(u_m+1) \in \Gamma_{k_0}$,而$|\Gamma_{k_0}| \leqslant n$,所以上述$m$个自然数中至少有某两个相等. 不妨设$j_1(u_1+1) = j_2(u_2+1)$. 因为$k_1 < k_2$, 所以有

$$\begin{aligned}\overline{x_{j_1k_1}} &= w_{j_1k_1}\overline{x_{j_1(1),k_1+1}} = \cdots \\ &= w_{j_1k_1}w_{j_1(1),k_1+1}\cdots w_{j_1(v),k_2-1}\overline{x_{j_1(v+1),k_2}},\end{aligned}$$

这里$j_1(v+1) = \alpha_{k_2-1}(j_1(v)) \in \mathrm{Im}\ \alpha_{k_2-1}$, 记$u = j_1(v+1)$,则由式(5.12.14)有

$$\overline{x_{u,k_2}} = w_{j_1(v+1),k_2}w_{j_1(v+2),k_2+1}\cdots w_{j_1(u_1),k_1+u_1}\overline{x_{j_1(u_1+1),k_0}},$$

$$\overline{x_{j_2,k_2}} = w_{j_2,k_2}w_{j_2(1),k_2+1}\cdots w_{j_2(u_2),k_2+u_2}\overline{x_{j_2(u_2+1),k_0}}.$$

所以j_2是可连接的. 因此$j_2 \in \Delta''_{k_2}$. 这与$j_2 \in \Delta'_{k_2}$矛盾. 这样就证明了断言(5.12.13)是成立的.

因此存在自然数k_0, 使得当$l > k_0$时, $\Delta'_l = \varnothing$. 对于k_0, 存在I的有限子集合I_0, 使得

$$\bigcup_{k=1}^{k_0}\bigcup_{i\in\Gamma_k} S\overline{x_{ik}} \leqslant \coprod_{i\in I_0} Se_i.$$

记$E = \coprod_{i\in I_0} Se_i$. 对于$l$和$j \in \Gamma_l$, 考虑如下两种情形:

(i) $l \leqslant k_0$. 这时$\overline{x_{jl}} \in E$.

(ii) $l > k_0$. 此时$\Gamma_l = \Delta''_l \cup \mathrm{Im}\alpha_{l-1}$. 设$l = k_0 + l'$. 对$l'$应用数学归纳法和可连接的概念容易证明$\overline{x_{jl}} \in E$. 所以有

$$\coprod_{i\in I_0} Se_i \subseteq G = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i\in\Gamma_k} S\overline{x_{ik}} \subseteq E \subseteq \coprod_{i\in I_0} Se_i.$$

这说明I是有限集合. 因此G是有限生成的. □

定理 5.12.7 设S是左完全幺半群, A是任意左S-系, n是自然数, 则A关于n-生成(即有一组个数不超过n的生成元)的S-子系满足升链条件.

证明 设A是左S-系, A中有如下的升链: $A_1 \leqslant A_2 \leqslant \cdots \leqslant A_k \leqslant \cdots$, 其中$A_k = \bigcup_{i=1}^{n_k} Sa_{ik}, a_{ik} \in A, n_k \leqslant n, k = 1, 2, \cdots$. 对于任意$i \in \Gamma_k$, 存在$j \in \Gamma_{k+1}$, 使得$a_{ik} \in Sa_{j,k+1}$. 当然这样的$j$不唯一, 取定某个$j \in \Gamma_{k+1}$具有上述性质, 并定义$\alpha_k(i) = j$, 则$\alpha_k$是从$\Gamma_k$到$\Gamma_{k+1}$的映射, $k = 1, 2, \cdots$. 对于任意的k和$i \in \Gamma_k$以及如上取定的$j = \alpha_k(i)$, 取$w_{ik} \in S$, 使得$a_{ik} = w_{ik}a_{\alpha_k(i),k+1}$.

对于上述的n_k, α_k和w_{ik}, 和前面一样作左S-系$G = F/\rho$, 由引理5.12.5知G是强平坦的. 又因为S是左完全幺半群, 所以G是投射的. 再由引理5.12.6知G是有限生成的.

令$B=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$, 作映射$f:G\to B, f(s\overline{x_{ik}})=sa_{ik}$. f是有定义的. 这是因为: 若$s\overline{x_{ik}}=t\overline{x_{jl}}$, 则由引理5.12.4知有$sw_{ik}w_{i_1,k+1}\cdots w_{i_p,h}=tw_{jl}w_{j_1,l+1}\cdots w_{j_q,h}$, $\alpha_h(i_p)=\alpha_h(j_q)$. 所以有

$$\begin{aligned} sa_{ik} &= sw_{ik}a_{i_1,k+1}=sw_{ik}w_{i_1,k+1}a_{i_2,k+2}=\cdots \\ &= sw_{ik}w_{i_1,k+1}\cdots w_{i_p,h}a_{\alpha_h(i_p),h+1} \\ &= tw_{jl}w_{j_1,l+1}\cdots w_{j_q,h}a_{\alpha_h(j_q),h+1} \\ &= \cdots = tw_{jl}a_{j_1,l+1}=ta_{jl}. \end{aligned}$$

显然f又是满同态. 所以A是有限生成的, 因此存在k_0, 使得当$k\geqslant k_0$时, $A_k=A_{k_0}$. □

§5.13 左可消幺半群

引理 5.13.1 每一个右儿乎正则的幺半群是右PP幺半群.

证明 设S是右儿乎正则的幺半群并且$s\in S$. 则存在$r,r_1,\cdots,r_m,s_1,\cdots,s_{m-1}\in S$以及左可消元$c_1,c_2,\cdots,c_m\in S$, 使得下述等式组成立:

$$\begin{aligned} &c_1s_1=r_1s, \\ &c_2s_2=r_2s_1, \\ &\cdots\cdots \\ &c_ms_m=r_ms_{m-1}, \\ &s=srs_m. \end{aligned}$$

由第一个和最后一个等式有$c_1s_1=r_1s=r_1srs_m=c_1s_1rs_m$. 因为$c_1$是左可消的, $s_1=s_1rs_m$. 由此等式以及等式组中第二个等式可得$c_2s_2=r_2s_1=r_2s_1rs_m=c_2s_2rs_m$,同理可得$s_2=s_2rs_m$.一直做下去最后可得$s_m=s_mrs_m$. 记$rs_m=e$,则$e$必为幂等元并且使得$s=se$. 现假设$u,v\in S$使得$su=sv$. 那么$c_1s_1u=r_1su=r_1sv=c_1s_1v$,因此$s_1u=s_1v$. 同理依次可得$s_2u=s_2v,\cdots,s_mu=s_mv$. 因此$rs_mu=rs_mv$, 即$S$是右PP的. □

引理 5.13.2 设I是幺半群S的真左理想, 则$A(I)$不满足条件(PWP).

证明 对任意的$i\in I$, 显然有$i(1,x)=i(1,y)$, 但不存在$(p,w)\in A(I)(w\in\{x,y,z\},p\in S)$以及$u,v\in S$, 使得$(1,x)=u(p,w),(1,y)=v(p,w),iu=iv$.□

引理 5.13.3　设S是幺半群，如果所有平坦S-系满足条件(PWP)，则$|E(S)| = 1$.

证明　因为对任意的$e \in E(S)$, $i \in Se$, $i \in i(Se)$, 如果$Se \neq S$, 由命题5.2.2知$A(Se)$是平坦的，由已知条件，$A(Se)$满足条件(PWP)，这与引理5.13.2矛盾. □

定理 5.13.4　对于幺半群S, 以下几条等价:

(1) 所有挠自由的S-系是主弱kernel平坦的;

(2) 所有挠自由的S-系是平移kernel平坦的;

(3) 所有挠自由的S-系满足条件(PWP);

(4) S是左可消幺半群.

证明　(1)⇒(2)⇒(3) 显然.

(3)⇒(4) 所有挠自由的左S-系满足条件(PWP)，则所有挠自由的左S-系是主弱平坦的，由引理5.10.8 得S右几乎正则的. 故由引理5.13.1可知S是右PP幺半群. 另一方面，所有挠自由的左S-系满足条件(PWP)，则所有平坦的左S-系满足条件(PWP)，所以$|E(S)| = 1$. 但S是右PP幺半群，故必是左可消的.

(4)⇒(1) 设A是挠自由的左S-系，S是左可消幺半群. 由定义易证A满足条件(PWP). 由于A是挠自由的左S-系，S是左可消幺半群，故命题4.4.20中第二个条件可以简化为: 在$\Delta \otimes A$中

$$sa = s'a' \Rightarrow (xs, xs) \otimes a = (xs', xs') \otimes a',$$

其中$s, s', x \in S, a, a' \in A, \Delta = \{(u, u) | u \in S\}$. 故结论成立. □

推论 5.13.5　设S是幺半群. 如果所有挠自由的左S-系满足条件(P)，则S是左可消幺半群.

引理 5.13.6　设S是右PSF幺半群并且不是左可消的. $I = \{s \in S | s$不是S的左可消元$\}$, 则I是S的真左理想并且$A(I)$是平坦的.

证明　设S不是左可消的幺半群, 显然I是S的真左理想. 对任意的$i \in I$, 由于i不是左可消元, 故存在$s, t \in S$使得$s \neq t$但$is = it$. 对等式$is = it$, 因为S是右PSF幺半群, 故存在$j \in S$使得$i = ij, js = jt$. 那么$j \in I$, 否则$j \notin I$说明j是左可消元, 则$s = t$, 矛盾. 故由命题5.2.2知$A(I)$是平坦的. □

定理 5.13.7　对于幺半群S, 以下几条等价:

(1) S是右PSF幺半群并且所有平坦的S-系是主弱kernel平坦的;

(2) S是右PSF幺半群并且所有弱平坦的S-系是主弱kernel平坦的;

(3) S是右PSF幺半群并且所有主弱平坦的S-系是主弱kernel平坦的;

(4) S是右PSF幺半群并且所有平坦的S-系是平移kernel平坦的;

(5) S是右PSF幺半群并且所有弱平坦的S -系是平移kernel平坦的;

(6) S是右PSF幺半群并且所有主弱平坦的S -系是平移kernel平坦的;

(7) S是右PSF幺半群并且所有平坦的S -系满足条件(PWP);

(8) S是右PSF幺半群并且所有弱平坦的S -系满足条件(PWP);

(9) S是右PSF幺半群并且所有主弱平坦的S -系满足条件(PWP);

(10) S是左可消幺半群.

证明 (3)⇒(2)⇒(1)⇒(4)⇒(7)和(3)⇒(6)⇒(5)⇒(4)⇒(7)是显然的.

(10)⇒(3) S是左可消幺半群,显然是右PSF的. 由定理5.13.4,显然结论成立.

(7)⇒(10) 若S不是左可消幺半群,则$I = \{s \in S | s$不是S的左可消元$\}$是S的真左理想, 由引理5.13.6可知$A(I)$是平坦的, 由(7)推出$A(I)$一定满足条件(PWP), 这和引理5.13.2矛盾. □

推论 5.13.8 对于幺半群S, 以下几条等价:

(1) S是右PP幺半群并且所有平坦的S -系是主弱kernel平坦的;

(2) S是右PP幺半群并且所有弱平坦的S -系是主弱kernel平坦的;

(3) S是右PP幺半群并且所有主弱平坦的S -系是主弱kernel平坦的;

(4) S是右PP幺半群并且所有平坦的S -系是平移kernel平坦的;

(5) S是右PP幺半群并且所有弱平坦的S -系是平移kernel平坦的;

(6) S是右PP幺半群并且所有主弱平坦的S -系是平移kernel平坦的;

(7) S是右PP幺半群并且所有平坦的S -系满足条件(PWP);

(8) S是右PP幺半群并且所有弱平坦的S -系满足条件(PWP);

(9) S是右PP幺半群并且所有主弱平坦的S -系满足条件(PWP);

(10) S是左可消幺半群.

定理 5.13.9 对于幺半群S, 以下几条等价:

(1) S是右PSF幺半群并且所有平坦的S -系是弱拉回平坦的;

(2) S是右PSF幺半群并且所有弱平坦的S -系是弱拉回平坦的;

(3) S是右PSF幺半群并且所有平坦的S -系是弱kernel平坦的;

(4) S是右PSF幺半群并且所有弱平坦的S -系是弱kernel平坦的;

(5) S是右PSF幺半群并且所有平坦的S -系满足条件(WP);

(6) S是右PSF幺半群并且所有弱平坦的S -系满足条件(WP);

(7) S是右PSF幺半群并且所有平坦的S -系满足条件(PWP);

(8) S是右PSF幺半群并且所有弱平坦的S -系满足条件(PWP).

(9) S是左可消幺半群. .

证明 (2)⇒(4)⇒(6)⇒(5)⇒(7)和(2)⇒(1)⇒(3)⇒(5)⇒(7)是显然的.

(7)⇒(9) 类似于定理5.13.7的(7)⇒(10)的证明.

(9)⇒(2) S是左可消幺半群,显然是右PSF的.同时, 若S是左可消幺半群, 由定理4.5.11, 所有弱平坦的左S -系满足条件(P).最后,若S是左可消幺半群, 显然所有左S -系满足条件(E′). □

推论 5.13.10 对于幺半群S, 以下几条等价:

(1) S是右PP幺半群并且所有平坦的S -系是弱拉回平坦的;

(2) S是右PP幺半群并且所有弱平坦的S -系是弱拉回平坦的;

(3) S是右PP幺半群并且所有平坦的S -系是弱kernel平坦的;

(4) S是右PP幺半群并且所有弱平坦的S -系是弱kernel平坦的;

(5) S是右PP幺半群并且所有平坦的S -系满足条件(WP);

(6) S是右PP幺半群并且所有弱平坦的S -系满足条件(WP);

(7) S是右PP幺半群并且所有平坦的S -系满足条件(PWP);

(8) S是右PP幺半群并且所有弱平坦的S -系满足条件(PWP);

(9) S是左可消幺半群.

注 5.13.11 在定理5.13.9中,把条件(PWP)改为条件(P),则定理中各条等价性不变.

第6章 特殊幺半群上的平坦系

§6.1 逆 半 群

本章考虑几类特殊幺半群(如逆半群,广义逆半群,带,全变换半群等)上的S-系的平坦性.

第5章中证明了幺半群S是正则的当且仅当所有满足条件(E)的S-系是平坦的. 对于逆幺半群,有:

定理 6.1.1 逆幺半群是左(右)绝对平坦的.

证明 设B是任意S-系, 要证明B是平坦的.

设A是右S-系, 任意的$a, a' \in A$, $b, b' \in B$, 在$A \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$, 则存在$a_1, \cdots, a_n \in A$, $b_2, \cdots, b_n \in B$, $s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$,使得

$$\begin{aligned} &a = a_1 s_1, \\ &a_1 t_1 = a_2 s_2, \qquad &s_1 b = t_1 b_2, \\ &\cdots\cdots \qquad &\cdots\cdots \\ &a_n t_n = a', \qquad &s_n b_n = t_n b'. \end{aligned}$$

可以假定n是偶数(必要时再增加两个等式: $a' \cdot 1 = a', 1 \cdot b' = 1 \cdot b'$)令

$$\begin{aligned} &x_0 = 1,\ x_i = s_1^{-1} t_1 s_2^{-1} t_2 \cdots s_i^{-1} t_i, \qquad &1 \leqslant i \leqslant n, \\ &y_0 = 1,\ y_i = t_n^{-1} s_1 t_{n-1}^{-1} s_{n-1} \cdots t_{n-i+1}^{-1} s_{n-i+1}, \ &1 \leqslant i \leqslant n, \end{aligned}$$

这里x^{-1}表示x的逆元(S是逆幺半群).简单的计算可知有

$$x_{n-i} x_{n-i}^{-1} = x_n, \quad 0 \leqslant i \leqslant n, \tag{6.1.1}$$

$$y_i x_{n-i}^{-1} = y_n, \quad 0 \leqslant i \leqslant n. \tag{6.1.2}$$

下面用数学归纳法证明对任意$i \in \{1, \cdots, n\}$,有

$$a x_i = a_i t_i x_i^{-1} x_i. \tag{6.1.3}$$

当$i=1$时, 有

$$\begin{aligned} a_1t_1x_1^{-1}x_1 &= a_1t_1t_1^{-1}s_1s_1^{-1}t_1 = a_1s_1s_1^{-1}t_1t_1^{-1}t_1 \\ &= a_1s_1s_1^{-1}t_1 = ax_1. \end{aligned}$$

设$1\leqslant k<n$, 如下计算:

$$\begin{aligned} & a_{k+1}t_{k+1}x_{k+1}^{-1}x_{k+1} \\ =& a_{k+1}t_{k+1}t_{k+1}^{-1}s_{k+1}x_k^{-1}x_ks_{k+1}^{-1}t_{k+1} \\ =& a_{k+1}s_{k+1}x_k^{-1}x_ks_{k+1}^{-1}t_{k+1}t_{k+1}^{-1}t_{k+1} \\ =& a_{k+1}s_{k+1}x_k^{-1}x_ks_{k+1}^{-1}t_{k+1} \\ =& a_kt_kx_k^{-1}x_ks_{k+1}^{-1}t_{k+1} \\ =& ax_ks_{k+1}^{-1}t_{k+1} \qquad \text{(归纳假定)} \\ =& ax_{k+1}. \end{aligned}$$

所以对任意的$i\in\{1,\cdots,n\}$, 式(6.1.3)成立. 用类似的方法可以证明对任意的$i\in\{1,\cdots,n\}$, 有

$$a'y_i = a_{n-i+1}s_{n-i+1}y_i^{-1}y_i. \tag{6.1.4}$$

记$e_i=s_i^{-1}s_i$, $f_i=t_{n-i+1}^{-1}t_{n-i+1}$, $i=1,2,\cdots,n$. 下面要证明如下的等式组成立:

$$\begin{aligned} &ax_0 = ax_0e_1, && \\ &ax_1 = ax_1e_2, && s_1b = t_1b_2, \\ &ax_2 = ax_2e_3, && s_2b_2 = t_2b_3, \\ &\cdots\cdots && \cdots\cdots \\ &ax_{n-1} = ax_{n-1}e_n, && s_{n-1}b_{n-1} = t_{n-1}b_n, \\ &ax_ny_0 = ax_ny_0f_1, && s_nb_n = t_nb', \\ &ax_ny_1 = ax_ny_1f_2, && t_nb' = s_nb_n, \\ &ax_ny_2 = ax_ny_2f_3, && t_{n-1}b_n = s_{n-1}b_{n-1}, \\ &\cdots\cdots && \cdots\cdots \\ &ax_ny_{\frac{n}{2}-1} = ax_ny_{\frac{n}{2}-1}f_{\frac{n}{2}}, && t_{\frac{n}{2}+2}b_{\frac{n}{2}+3} = s_{\frac{n}{2}+2}b_{\frac{n}{2}+2}, \\ &ax_ny_{\frac{n}{2}} = a'y_nx_{\frac{n}{2}}, && t_{\frac{n}{2}+1}b_{\frac{n}{2}+2} = s_{\frac{n}{2}+1}b_{\frac{n}{2}+1}, \end{aligned}$$

$$
\begin{array}{ll}
a'y_nx_{\frac{n}{2}-1}e_{\frac{n}{2}} = a'y_nx_{\frac{n}{2}-1}, & t_{\frac{n}{2}}b_{\frac{n}{2}+1} = s_{\frac{n}{2}}b_{\frac{n}{2}}, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
a'y_nx_2e_3 = a'y_nx_2, & t_3b_4 = s_3b_3, \\
a'y_nx_1e_2 = a'y_nx_1, & t_2b_3 = s_2b_2, \\
a'y_nx_0e_1 = a'y_nx_0, & t_1b_2 = s_1b, \\
a'y_{n-1}f_n = a'y_{n-1}, & s_1b = t_1b_2, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
a'y_2f_3 = a'y_2, & s_{n-2}b_{n-2} = t_{n-2}b_{n-1}, \\
a'y_1f_2 = a'y_1, & s_{n-1}b_{n-1} = t_{n-1}b_n, \\
a'y_0f_1 = a'y_0, & s_nb_n = t_nb'.
\end{array}
$$

右边等式的成立是显然的.下面只考虑左边的等式组.

当$i=0$时, $ax_0e_1 = ae_1 = a_1s_1s_1^{-1}s_1 = a_1s_1 = a = ax_0$. 设$0<i<n-1$, 则

$$
\begin{aligned}
ax_ie_{i+1} &= a_it_ix_i^{-1}x_ie_{i+1} && \text{(由式(6.1.3))} \\
&= a_{i+1}s_{i+1}x_i^{-1}x_ie_{i+1} \\
&= a_{i+1}s_{i+1}e_{i+1}x_i^{-1}x_i \\
&= a_{i+1}s_{i+1}x_i^{-1}x_i = a_it_ix_i^{-1}x_i \\
&= ax_i. && \text{(由式(6.1.3))}
\end{aligned}
$$

对于$i \in \{0,\cdots,\frac{n}{2}-1\}$, 如下计算:

$$
\begin{aligned}
ax_ny_i &= ax_{n-i}y_i^{-1}y_i && \text{(由式(6.1.1))} \\
&= ax_{n-i}f_{i+1}y_i^{-1}y_i \\
&= ax_{n-i}y_i^{-1}y_if_{i+1} \\
&= ax_ny_if_{i+1}. && \text{(由式(6.1.1))}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
ax_ny_{\frac{n}{2}} &= ax_{\frac{n}{2}}y_{\frac{n}{2}}^{-1}y_{\frac{n}{2}} && \text{(由式(6.1.1))} \\
&= a_{\frac{n}{2}}t_{\frac{n}{2}}x_{\frac{n}{2}}^{-1}x_{\frac{n}{2}}y_{\frac{n}{2}}^{-1}y_{\frac{n}{2}} && \text{(由式(6.1.3))} \\
&= a_{\frac{n}{2}+1}s_{\frac{n}{2}+1}y_{\frac{n}{2}}^{-1}y_{\frac{n}{2}}x_{\frac{n}{2}}^{-1}x_{\frac{n}{2}}
\end{aligned}
$$

$$= a'y_{\frac{n}{2}}x_{\frac{n}{2}}^{-1}x_{\frac{n}{2}} \qquad (\text{由式(6.1.4)})$$
$$= a'y_n x_{\frac{n}{2}}. \qquad (\text{由式(6.1.2)})$$

其余的等式可以用类似的方法证明.

下面要说明前述等式组是“左、右连接”的. 这只要把左边的等式组重新改写一下即可. 例如,前一段等式组可以改写为:

$$\begin{aligned}
&a = (as_1^{-1})s_1, && \\
&(as_1^{-1})t_1 = (ax_1s_2^{-1})s_2, && s_1b = t_1b_2, \\
&(ax_1s_2^{-1})t_2 = (ax_2s_3^{-1})s_3, && s_2b = t_2b_3, \\
&\quad \cdots\cdots && \quad \cdots\cdots \\
&(ax_{n-2}s_{n-1}^{-1})t_{n-1} = (ax_{n-1}s_n^{-1})s_n, && s_{n-1}b_{n-1} = t_{n-1}b_n.
\end{aligned}$$

其他的等式可类似地改写. 因此在$(aS \cup a'S) \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$. 所以$B$是平坦$S$-系.

同理可以证明任意右S-系也是平坦的. □

推论 6.1.2 完全内射幺半群是左、右绝对平坦的.

证明 由§ 3.6中的结果及定理6.1.1即得. □

为了考虑群并, 需要以下引理.

引理 6.1.3 左绝对平坦幺半群的同态像仍是左绝对平坦的.

证明 设$f : S \to T$是从S到T上的幺半群同态. 对于任意T-系B, 规定S在B上的左作用为:

$$s \cdot b = f(s)b, \quad \forall\, s \in S, \quad \forall\, b \in B,$$

则B就是S-系. 同理任意右T-系可以看成是右S-系. 显然$A \underset{S}{\otimes} B = A \underset{T}{\otimes} B$. 所以若$S$是左绝对平坦的, 则$T$也是左绝对平坦的. □

定义 6.1.4 设S是幺半群, F是S的子幺半群. 称F是S的滤子, 如果对任意$x, y \in S$, $xy \in F$能推出$x, y \in F$.

引理 6.1.5 左绝对平坦幺半群的滤子仍是左绝对平坦的.

证明 设F是左绝对平坦幺半群S的滤子, 且$F \neq S$. 则$S - F$是S的理想. 令$P = S - F$. 则由引理6.1.3知Rees商S/P是左绝对平坦的. 显然$S/P \simeq F \dot{\cup} \{0\} = F^0$. 设$A$是$F$-系, 令$A^0 = A \dot{\cup} \{\theta\}$, 规定$F^0$在$A^0$上的左作用为: $F \cdot \theta = \{\theta\}, 0 \cdot \theta = \theta, 0 \cdot A = \{\theta\}$. 则$A^0$是$F^0$-系. 同理对于任意右$F$-系$B$, 可以构造右$F^0$-系$B^0$.

设X是右S-系, Y是左S-系, $x,x'\in X$, $y,y'\in Y$, 在$X\underset{S}{\otimes}Y$中有$x\otimes y=x'\otimes y'$, 则存在$x_1,\cdots,x_n\in X, y_2,\cdots,y_n\in Y$, $s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n\in F$, 使得

$$\begin{array}{ll} x=x_1s_1, & \\ x_1t_1=x_2s_2, & s_1y=t_1y_2, \\ x_2t_2=x_3s_3, & s_2y_2=t_2y_3, \\ \quad\cdots\cdots & \quad\cdots\cdots \\ x_nt_n=x', & s_ny_n=t_ny'. \end{array}$$

显然$x_1,\cdots,x_n\in X^0, y_2,\cdots,y_n\in Y^0, s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n\in F^0$. 所以在$X^0\underset{F^0}{\otimes}Y^0$中有$x\otimes y=x'\otimes y'$. 因为$F^0$是左绝对平坦的, 所以在$(xF^0\cup x'F^0)\underset{F^0}{\otimes}Y^0$中有$x\otimes y=x'\otimes y'$. 因此设上述等式组中的$x_1,\cdots,x_n\in xF^0\cup x'F^0, s_1,t_1,\cdots,s_n, t_n\in F^0, y_2,\cdots,y_n\in Y^0$. 由$x=x_1s_1$知$x_1\neq\theta$, $s_1\neq 0$. 由$s_1y=t_1y_2$知$t_1\neq 0$, $y_2\neq\theta$, 再由$x_1t_1=x_2s_2$知$x_2\neq\theta$, $s_2\neq 0$. 如此继续下去, 可知$x_1,\cdots,x_n\in xF\cup x'F$, $y_2,\cdots,y_n\in Y, s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n\in F$, 所以在$(xF\cup x'F)\underset{F}{\otimes}Y$中有$x\otimes y=x'\otimes y'$. 因此$Y$是平坦$F$-系. 即$F$是左绝对平坦的. □

定理 6.1.6 设幺半群S是群并, 则S是左、右绝对平坦的当且仅当S是群的半格.

证明 若S是群的半格, 则S是逆幺半群, 所以由定理6.1.1知S是左、右绝对平坦的.

反之, 设S是左、右绝对平坦的. 因为S是群并, 所以S是完全单半群的半格. 设$S=\underset{\alpha\in\Gamma}{\dot\cup}S_\alpha$, Γ是半格, S_α是完全单半群. 对于任意$\beta\in\Gamma$, 令

$$S_{[\beta)}=\dot\cup\{S_\alpha \mid \alpha\in\Gamma,\alpha\geqslant\beta\},$$

则$S_{[\beta)}$是S的滤子. 所以由引理6.1.5易知$S_{[\beta)}$是左、右绝对平坦的. 由定理5.5.5知$S_{[\beta)}$, 从而S_β的任意两个左(右)理想有非空的交. 由于S_β是完全单半群, 所以S_β是群, 因此S是群的半格. □

设S是半群.称S是左(右)绝对平坦的,如果幺半群S^1是左(右)绝对平坦的.

下面的推论是不证自明的.

推论 6.1.7 带B是左、右绝对平坦的当且仅当B是半格.

推论 6.1.8 完全单半群S是左、右绝对平坦的当且仅当S是群.

注 6.1.9 关于定理6.1.1的证明, 采用了Bulman-Fleming 和McDowell 的原始证明, 这个证明不依赖于第4章和第5章的结果. 如果利用第4章和第5章的部分结果的话, 可以写出定理6.1.1的很简单的证明:

因为S是正则的, 且对任意$x, y \in S, z = xx'y = xx'yy'y = yy'xx'y \in xS \cap yS, z = xx'y\lambda(x, y)xx'x = x$, 所以由定理4.5.11知所有$S$-系是弱平坦的. 又对于任意$u, v \in E(S), z = uv = vu \in Su \cap Sv, z = uv\rho(u, v)v$, 所以由定理5.3.4知任意弱平坦$S$-系是平坦的, 所以任意$S$-系是平坦的. 同理可以证明任意右$S$-系是平坦的.

§6.2　本原正则半群

设S是半群, $e, f \in E(s)$. 由于$e \leqslant f$当且仅当$e = ef = fe$. 显然若S中有零元0和幺元1时, 对任意$e \in E(S)$有$0 \leqslant e \leqslant 1$. 称$e \in E(S)$是本原幂等元, 如果$e \neq 0$, 且在序关系$\leqslant$之下, e是非零幂等元集合中的极小元.

设S是带零正则半群, 称S是本原正则的, 如果S的任意非零幂等元都是本原的.

定义 6.2.1　设半群S中含有零元0, $x \in S$. 记

$$\operatorname{ann}_l(x) = \{s | s \in S,\ sx = 0\},$$
$$\operatorname{stab}_l(x) = \{s \in S | sx = x\}.$$

同理可以规定集合$\operatorname{ann}_r(x)$和$\operatorname{stab}_r(x)$.

下面的定理6.2.2选自文献[36].

定理 6.2.2　设S是本原正则半群, 则以下两条等价:

(1) S^1是左绝对平坦的;

(2) 对任意$x, y \in S$, 若$\operatorname{ann}_l(x)=\operatorname{ann}_l(y)$, 则$xS = yS$.

证明　(2)$\Rightarrow$(1) 设$x, y \in S^1$. 若$x \neq 1$且$x \notin yS$, 则$y \neq 1$, 所以$xS \neq yS$. 因此由(2)知存在元素w,使得$w \in (\operatorname{ann}_l(x)-\operatorname{ann}_l(y))\cup(\operatorname{ann}_l(y)-\operatorname{ann}_l(x))$.若$w \in \operatorname{ann}_l(x)-\operatorname{ann}_l(y)$, 则由本原正则半群的性质(见文献[55]第6.5节)可知$y \in Swy$; 若$w \in \operatorname{ann}_l(y)-\operatorname{ann}_l(x)$, 则$x \in Swx$. 当$y \in Swy$时, 存在$u \in S$, 使得$y = uwy$, 所以$uw \in \operatorname{stab}_l(y) \cap \operatorname{ann}_l(x)$. 当$x \in Swx$时, 存在$v \in S$, 使得$vwx = x$. 所以$vw \in \operatorname{stab}_l(x) \cap \operatorname{ann}_l(y)$. 因此$S^1$具有如下性质: 任意$x, y \in S^1$, 或$x = 1$, 或$x \in yS$, 或$(\operatorname{ann}_l(x) \cap \operatorname{stab}_l(y)) \cup (\operatorname{ann}_l(y) \cap \operatorname{stab}_l(x)) \neq \varnothing$.

设A是右S^1-系, B是左S^1-系, 任意的$a, a' \in A$, $b, b' \in B$, 在$A \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$, 则存在$a_1, \cdots, a_n \in A, b_2, \cdots, b_n \in B$, $s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S^1$,使得

$$\begin{aligned}
&a = a_1 s_1, & \\
&a_1 t_1 = a_2 s_2, & s_1 b = t_1 b_2, \\
&\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
&a_n t_n = a', & s_n b_n = t_n b'.
\end{aligned}$$

下面对n使用数学归纳法证明在$(aS^1 \cup a'S^1) \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$.

设$n = 1$. 则有

$$\begin{aligned}
&a = a_1 s_1, & \\
&a_1 t_1 = a', & s_1 \cdot b = t_1 \cdot b'.
\end{aligned}$$

若$t_1 = 1$, 则$a_1 = a' \in aS^1 \cup a'S^1$, 所以结论成立. 设$t_1 \in s_1 S$, 则存在$u \in S$, 使得$t_1 = s_1 u$. 所以对任意$s_1' \in V(s_1)$, $as_1' t_1 = a_1 s_1 s_1' s_1 u = a_1 s_1 u = a_1 t_1 = a'$, 因此有

$$\begin{aligned}
&a = (as_1')s_1, & \\
&(as_1')t_1 = a', & s_1 b = t_1 b'.
\end{aligned}$$

故在$(aS^1 \cup a'S^1) \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$. 设$\mathrm{ann}_l(s_1) \cap \mathrm{stab}_l(t_1) \neq \varnothing$, 则存在$z \in S$, 使得$zs_1 = 0, zt_1 = t_1$. 因此$0b = zs_1 b = zt_1 b' = t_1 b' = s_1 b$, 所以有:

$$\begin{aligned}
&a = (as_1')s_1, & \\
&(as_1')0 = (a't_1')0, & s_1 b = 0b, \\
&(a't_1')t_1 = a', & 0b = t_1 b',
\end{aligned}$$

这里$s_1' \in V(s_1), t_1' \in V(t_1)$. 所以在$(aS^1 \cup a'S^1) \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$. 若$\mathrm{ann}_l(t_1) \cap \mathrm{stab}_l(s_1) \neq \varnothing$, 则可用同样的方法类似地证明.

设$n > 1$. 如果$t_1 = 1$, 则有

$$\begin{aligned}
&a = a_2(s_2 s_1), & \\
&a_2 t_2 = a_3 s_3, & (s_2 s_1) b = t_2 b_3, \\
&\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
&a_n t_n = a', & s_n b_n = t_n b'.
\end{aligned}$$

所以由归纳假定知结论成立. 如果$s_n = 1$, 则可采用同上类似的方法证明. 设$t_1 \in s_1S$, 则存在$u \in S$, 使得$t_1 = s_1u$, 所以$a_1t_1 = a_1s_1u = au$. 对如下等式组使用归纳假定:

$$\begin{aligned} &a = a_1s_1, \\ &a_1t_1 = au, \qquad s_1b = t_1b_2, \end{aligned}$$

可知在$(aS^1 \cup a'S^1) \otimes B$中有$a \otimes b = au \otimes b_2$. 同样对以下等式组

$$\begin{aligned} &au = a_2s_2, \\ &a_2t_2 = a_3s_3, \qquad s_2b_2 = t_2b_3, \\ &\quad \cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots \\ &a_nt_n = a', \qquad s_nb_n = t_nb'. \end{aligned}$$

由归纳假定知在$(aS^1 \cup a'S^1) \otimes B$中有$au \otimes b_2 = a' \otimes b'$. 所以在$(aS^1 \cup a'S^1) \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$. 如果$s_n \in t_nS$, 则同上类似的讨论即可完成证明.

设$(\mathrm{ann}_l(s_1) \cap \mathrm{stab}_l(t_1)) \cup (\mathrm{ann}_l(t_1) \cap \mathrm{stab}_l(s_1)) \neq \varnothing$, 且$(\mathrm{ann}_l(s_n) \cap \mathrm{stab}_l(t_n)) \cup (\mathrm{ann}_l(t_n) \cap \mathrm{stab}_l(s_n)) \neq \varnothing$, 则存在$z, w \in S$, 使得$zt_1 = t_1, zs_1 = 0$, 或者$zs_1 = s_1, zt_1 = 0$; $ws_n = s_n, wt_n = 0$, 或者$wt_n = t_n, ws_n = 0$. 所以$zs_1b = zt_1b_2, ws_nb_n = wt_nb'$. 因此, $0b = t_1b_2 = s_1b = 0b_2 = \cdots = 0b_n = 0b', 0b' = s_nb_n = t_nb' = 0b_n = 00 = 0b_2 = 0b$. 故有如下的等式组:

$$\begin{aligned} &a = (as_1')s_1, \\ &(as_1')0 = (a't_n')0, \qquad s_1b = 0b', \\ &(a't_n')t_n = a', \qquad 0b' = t_nb'. \end{aligned}$$

所以在$(aS^1 \cup a'S^1) \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$.

这样就证明了B是平坦S-系. 所以S^1是左绝对平坦的.

(1)⇒(2) 设S^1是左绝对平坦幺半群, 但S不满足条件(2), 则存在$x, y \in S$, 使得$\mathrm{ann}_l(x) = \mathrm{ann}_l(y)$但$xS \neq yS$. 因为$S$是本原正则半群, 所以$xS \cap yS = \{0\}$. 设$x = 0$, 则$\mathrm{ann}_l(x) = \mathrm{ann}_l(0) = S = \mathrm{ann}_l(y)$, 所以$y = 0$, 从而$xS = \{0\} = yS$, 矛盾. 所以$x \neq 0$. 下面证明$S^1/\lambda(x, y)$不是平坦的.

显然在$S^1 \underset{S^1}{\otimes} S^1/\lambda(x,y)$中有$x\otimes\overline{1} = y\otimes\overline{1}$. 如果在$(xS^1 \cup yS^1)\otimes S^1/\lambda(x,y)$中有$x \otimes \overline{1} = y \otimes \overline{1}$, 则存在$a_1, \cdots, a_n \in \{x, y\}, s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S^1$, 使得

$$
\begin{aligned}
&x = a_1 s_1, & \\
&a_1 t_1 = a_2 s_2, & \overline{s_1} = \overline{t_1}, \\
&\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
&a_n t_n = y, & \overline{s_n} = \overline{t_n}.
\end{aligned}
$$

显然存在$i \in \{0, \cdots, n\}$, 使得$a_0 = a_1 = \cdots = a_i = x, a_{i+1} = y$(为了方便, 记$a_0 = x, a_{n+1} = y$). 所以$xt_i = ys_{i+1} \in xS \cap yS$. 但$xt_i \neq 0$. 否则, 设$xt_i = 0$, 则$x \in \mathrm{ann}_l(t_i)$. 因为$s_i\lambda(x,y)t_i$而且$\mathrm{ann}_l(x) = \mathrm{ann}_l(y)$, 所以容易得到$\mathrm{ann}_l(s_i) = \mathrm{ann}_l(t_i)$. 因此$x \in \mathrm{ann}_l(s_i)$即$xs_i = 0$, 故$xt_{i-1} = 0$. 继续下去, 可得$xt_1 = 0$. 所以$x \in \mathrm{ann}_l(t_1) = \mathrm{ann}_l(s_1)$, 从而$x = a_1 s_1 = xs_1 = 0$. 和$x \neq 0$的条件矛盾. 所以$0 \neq xt_i \in xS \cap yS$. 这和$xS \cap yS = \{0\}$矛盾. 矛盾说明在$(xS^1 \cup yS^1) \otimes S^1/\lambda(x,y)$中$x \otimes \overline{1} \neq y \otimes \overline{1}$. 所以$S^1/\lambda(x,y)$不是平坦$S$-系. □

从上述证明过程可得:

定理 6.2.3 设S是本原正则半群, 则以下几条等价:

(1) S^1是左绝对平坦的;

(2) 任意循环S^1-系是平坦的;

(3) 任意S^1-系是弱平坦的;

(4) 任意循环S^1-系是弱平坦的;

(5) 对任意$x, y \in S$, 若$\mathrm{ann}_l(x) = \mathrm{ann}_l(y)$, 则$xS = yS$.

完全0-单半群是特殊的本原正则半群. 设$S = \mu^0[G; I, \Lambda; P]$是完全0-单半群, 其中$I$, Λ是非空集合, G是群, $P = (p_{\lambda i})$是G^0上的$\Lambda \times I$矩阵, 且满足

$$
\begin{aligned}
&\forall i \in I, \exists \lambda \in \Lambda, \text{使得} p_{\lambda i} \neq 0, \\
&\forall \lambda \in \Lambda, \exists i \in I, \text{使得} p_{\lambda i} \neq 0.
\end{aligned}
$$

令$s(P) = (q_{\lambda i})$是G^0上的如下定义的$\Lambda \times I$矩阵:

$$
q_{\lambda i} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } p_{\lambda i} \neq 0, \\ 0, & \text{如果 } p_{\lambda i} = 0, \end{cases} \qquad \forall\, i \in I,\ \forall\, \lambda \in \Lambda,
$$

其中1是群G的单位元.

定理 6.2.4 设$S = \mu^0[G; I, \Lambda; P]$是Rees矩阵半群, 则以下几条是等价的:

(1) S^1是左绝对平坦的;

(2) 任意S^1-系是弱平坦的;

(3) 任意循环S^1-系是弱平坦的;

(4) $s(P)$的任意两列都不相同.

证明 只需证明对于Rees矩阵半群$S=\mu^0[G;I,\Lambda;P]$, 定理6.2.3中的(5)等价于定理6.2.4中的(4)即可.

设$s(P)$的i,j两列相同, 则有

$$p_{\lambda i}\neq 0\Leftrightarrow p_{\lambda j}\neq 0,\quad \forall\,\lambda\in\Lambda.$$

令$x=(1,i,\mu),y=(1,j,\mu)$, 其中$\mu\in\Lambda$, 容易证明$\mathrm{ann}_l(x)=\mathrm{ann}_l(y)$. 但因$i\neq j$, 所以$xS\neq yS$.

反过来, 设$x=(a,i,\mu),y=(a',i',\mu')\in S$, 若$i\neq i'$, 则$xS\neq yS$. 因为$s(P)$的$i,i'$两列不相同, 所以存在$\lambda\in\Lambda$, 使得$p_{\lambda i}=0$而$p_{\lambda i'}\neq 0$. 令$w=(1,i,\lambda)$, 则$wx=0$,但$wy\neq 0$. 所以$\mathrm{ann}_l(x)\neq\mathrm{ann}_l(y)$. 若$i=i'$, 则$xS=yS$. □

例 6.2.5 令$S=\mu^0[\{1\};\{1,2\},\{1\};(11)]$, 则由定理6.2.4知$S^1$是右绝对平坦的但不是左绝对平坦的.

称半群S是同余自由的, 如果除了1_s和$S\times S$以外, S再没有其他的同余, 下面的关于有限同余自由半群的构造定理可见Yamura[254]或Howie[115]的文章.

定理 6.2.6 设$I=\{1,\cdots,m\},\Lambda=\{1,\cdots,n\},P=(p_{\lambda i})$是元素取值于$\{1,0\}$的$n\times m$矩阵, 且每个行和每个列上都有非零元, 任意两个行不相同, 任意两个列不相同. 令$S=(I\times\Lambda)\cup\{0\}$, 规定乘法为

$$(i,\lambda)(j,\mu)=\begin{cases}(i,\mu), & \text{如果 } p_{\lambda j}=1,\\ 0, & \text{如果 } p_{\lambda j}=0,\end{cases}$$

$$(i,\lambda)0=0(i,\lambda)=00=0,$$

则S是阶为$mn+1$的同余自由半群. 反之, 任意含零元的有限同余自由半群都可如此构造.

因此有如下的

定理 6.2.7 设S是带零的有限同余自由半群, 则S^1是左、右绝对平坦幺半群.

由定理6.1.1知逆幺半群是左、右绝对平坦的. 利用本节的结果可以给出左、右绝对平坦但不是逆半群的例子.

例 6.2.8 设$G=\{1\},I=\Lambda=\{1,2\},P=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$, 作Rees 矩阵半群$S=\mu^0[G;I,\Lambda;P]$, 则$S$是有限同余自由半群, 所以$S^1$是左、右绝对平坦幺半群, 但$S$不是逆半群, 这可由$S$的如下乘法表看出(非平凡部分):

	e	f	g	s
e	e	f	e	f
f	e	f	0	0
g	g	s	g	s
s	g	s	0	0

§6.3 广义逆半群

设S是正则半群. 称S是广义逆半群, 如果$E(S)$是正规带. 称S是左(右)广义逆半群, 如果$E(S)$是左(右)正规带. 容易证明S是广义逆半群当且仅当S是正则的且对任意$x, y \in S$, 任意$e, f \in E(S)$, 恒有$xefy = xfey$; S是左(右)广义逆半群当且仅当S是正则的且对任意$x \in S$, 任意$e, f \in E(S)$, 恒有$xef = xfe(efx = fex)$. 本节刻画左绝对平坦的广义逆半群, 其主要结果取自于文献[38].

命题 6.3.1 设S是右广义逆半群, $e_1, e_2, f_1, f_2 \in E(S)$, 满足$e_1 \mathscr{R} e_2, f_1 \mathscr{R} f_2$, $f_1 e_1 = f_1$, $f_2 e_2 = f_2$. 如果$(f_1, f_2) \in \lambda(e_1, f_1) \vee \lambda(e_2, f_2)$, 那么$f_1 = f_2$.

证明 以$\lambda_1 = \lambda(e_1, f_1), \lambda_2 = \lambda(e_2, f_2), \Phi = \lambda_1 \circ \lambda_2$. 因为$\lambda_1 \vee \lambda_2 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Phi^n$, 只需证明若$(f_1, f_2) \in \Phi^n$, 则$f_1 = f_2$. 对$n$使用数学归纳法.

设$(f_1, f_2) \in \Phi^1$, 则存在$z \in S^1$, 使得$f_1 \lambda_1 z \lambda_2 f_2$. 设$z = f_1$, 则$(f_1, f_2) \in \lambda_2$. 所以$f_1 = f_2$或存在$t_1, \cdots, t_n \in S$, $\{c_i, d_i\} = \{e_2, f_2\}, i = 1, 2, \cdots, n$, 使得:

$$\begin{aligned} f_1 &= t_1 c_1, \\ t_1 d_1 &= t_2 c_2, \\ &\cdots\cdots \\ t_n d_n &= f_2. \end{aligned}$$

上式等式组均右乘e_2, 利用$f_2 e_2 = f_2$即可得到$f_1 = f_1 e_2, f_2 = f_2 e_2$. 若$c_1 = e_2$, 则$f_1 f_2 = t_1 e_2 f_2 = t_1 e_2 f_2 f_2 = t_1 f_2 e_2 f_2 = t_1 f_2 f_2 = t_1 d_1 f_2$. 若$c_1 = f_2$, 则$f_1 f_2 = t_1 f_2 f_2 = t_1 f_2 e_2 f_2 = t_1 e_2 f_2 f_2 = t_1 e_2 f_2 = t_1 d_1 f_2$. 继续上述过程, 类似的讨论可以证明$f_1 f_2 = t_1 d_1 f_2 = t_2 d_2 f_2 = \cdots = t_n d_n f_2 = f_2$. 又因为$f_1 \mathscr{R} f_2$, 所以$f_1 e_2 = f_2 x, x \in S$. 因此$f_2 f_1 e_2 = f_1 e_2$. 因为$S$是右广义逆半群, 所以$f_1 = f_1 e_2 = f_2 f_1 e_2 = f_1 f_2 e_2 = f_1 f_2 = f_2$. 设$z = f_2$, 则$(f_1, f_2) \in \lambda_1$. 同上类似的讨论即可完成证明. 所以下设$f_1 \neq z \neq f_2$, 则有$(f_1, z) \in \lambda_1, (f_2, z) \in \lambda_2$. 所以同上类似的讨论可知$f_1 e_1 = f_1, z e_1 = z, f_1 = z f_1, f_2 e_2 = f_2, z e_2 = z, f_2 = z f_2$.

显然$z \neq 1$(否则$e_1 = 1$). 设$z' \in V(z)$. 则有

$$\begin{aligned} f_1 = zf_1 = zf_1e_1 = zz'zf_1e_1 = zf_1z'ze_1 \\ = zf_1z'z = zf_1z'ze_2 = zz'zf_1e_2 \\ = zf_1e_2 = f_1e_2 = f_2f_1e_2 = f_1f_2e_2 = f_1f_2 \\ = f_2. \end{aligned}$$

设$n \geqslant 2, (f_1, f_2) \in \Phi^n$. 则存在$z_1, z_2 \in S^1$, 使得$f_1\Phi^{n-1}z_1\lambda_1z_2\lambda_2f_2$. 若$z_1 = z_2$, 则$f_1\Phi^{n-1}z_2\lambda_2f_2$, 所以$f_1\Phi^{n-1}f_2$. 由归纳假定即知$f_1 = f_2$. 若$f_1 = z_1$, 则$f_1\lambda_1z_2\lambda_2f_2$, 即$f_1\Phi^1f_2$. 若$f_2 = z_2$, 则$f_2\lambda_1z_1\Phi^{n-1}f_1$, 即$f_2\Phi^{n-1}f_1$. 故有$f_1 = f_2$. 下设$f_1 \neq z_1 \neq z_2 \neq f_2$. 类似于前面的讨论可知$z_1e_1 = z_1, z_2e_1 = z_2, z_1f_1 = z_2f_1, z_2e_2 = z_2, f_2e_2 = f_2, z_2f_2 = f_2$. 所以$f_1 = f_2f_1 = z_2f_2f_1 = z_2f_1$. 又$f_1e_1 = f_1, z_2e_1 = z_2$, 所以容易证明$(f_1, z_2) \in \lambda_1$(利用命题1.1.3). 因此$f_1\Phi^1f_2$, 故$f_1 = f_2$. □

下面是本节的主要定理.

定理 6.3.2 设S是右广义逆半群, 则以下几条是等价的:

(1) S^1是左绝对平坦的;

(2) 所有循环S^1-系是平坦的;

(3) 对任意$e, f, g \in E(S)$, 恒有: $efg = fg$或$efg = egf$.

证明 (1)⇒(2) 显然.

(2)⇒(3)设$e, f, g \in E(S)$, 但$efg \neq fg$. 令$e_1 = fg, e_2 = gf, f_1 = efg, f_2 = egf$. 容易证明$e_1, e_2, f_1, f_2 \in E(S)$, 且$e_1\mathscr{R}e_2, f_1\mathscr{R}f_2, f_1e_1 = f_1, f_2e_2 = f_2$. 记$\lambda_1 = \lambda(e_1, f_1), \lambda_2 = \lambda(e_2, f_2), \rho$为$S$上由$(e_1, e_2)$生成的最小右同余. 因为$e_1\mathscr{R}e_2$, 所以$e_1e_2 = e_2, e_2e_1 = e_1$. 设$x, y \in S$且$x\rho y$, 则$x = y$或存在$t_1, \cdots, t_n \in S^1$, 使得

$$\begin{aligned} x = c_1t_1, \\ d_1t_1 = c_2t_2, \\ \cdots\cdots \\ d_nt_n = y, \end{aligned}$$

其中$\{c_i, d_i\} = \{e_1, e_2\}, i = 1, \cdots, n$,显然$e_1x = x, e_1y = y, e_2x = x, e_2y = y$. 设$t_1, \cdots, t_n \in S$. 若$c_1 = e_1$, 则$d_1 = e_2$, 所以$e_1x = e_1c_1t_1 = e_1t_1 = e_2e_1t_1 = e_1e_2t_1 = e_1d_1t_1, e_2x = e_2c_1t_1 = e_2e_1t_1 = e_1e_2t_1 = e_1d_1t_1$. 若$c_1 = e_2$, 则$d_1 = e_1$, 所以$e_1x = e_1e_2t_1 = e_2e_1t_1 = e_2d_1t_1, e_2x = e_2t_1 = e_1e_2t_1 =$

$e_2e_1t_1 = e_2d_1t_1$. 用数学归纳法可以证明$e_1x = hd_nt_n = hy$, 其中$h \in \{e_1, e_2\}$. 所以$x = e_1x = hy = y$. 设$t_1, \cdots, t_i \in S$, 但$t_{i+1} = 1$, 则有

$$x = c_1t_1,\ d_1t_1 = c_2t_2,\ \cdots, d_it_i = c_{i+1}.$$

同上类似的证明可知$c = c_{i+1} \in \{e_1, e_2\}$. 同理可证明$y \in \{e_1, e_2\}$. 这说明若$x\rho y$, 则$x = y$或$\{x, y\} = \{e_1, e_2\}$.

作S^1-同态$\alpha : f_1S \cup f_2S \to S/\rho$如下:

$$\alpha(s) = \bar{s}, \quad \forall\, s \in f_1S \cup f_2S.$$

若$\overline{f_1s} = \overline{f_2t}$, 则$f_1s\rho f_2t$. 设$f_1s \neq f_2t$, 则$\{f_1s, f_2t\} = \{e_1, e_2\}$. 设$f_1s = e_1$, 则$f_1e_1 = e_1$, 所以$e_1 = f_1$, 即$fg = efg$. 矛盾. 设$f_1s = e_2$, 则$f_1e_2 = e_2$, 所以$efggf = gf$. 因此$fg = fgg = gfg = efgfg = efg$. 矛盾. 所以一定有$f_1s = f_2t$. 同样的方法可以用来考虑其他情形. 因此$\alpha$是单同态. 在$S^1/\rho \otimes S^1/(\lambda_1 \vee \lambda_2)$中, $\overline{f_1} \otimes \bar{1} = \bar{1} \otimes \overline{f_1} = \bar{1} \otimes \overline{e_1} = \overline{e_1} \otimes \bar{1} = \overline{e_2} \otimes \bar{1} = \bar{1} \otimes \overline{e_2} = \bar{1} \otimes \overline{f_2} = \overline{e_2} \otimes \bar{1}$. 因为循环$S$-系$S^1/(\lambda_1 \vee \lambda_2)$是平坦的, 所以在$(f_1S \cup f_2S) \otimes S^1/(\lambda_1 \vee \lambda_2)$中有$\overline{f_1} \otimes \bar{1} = \overline{f_2} \otimes \bar{1}$. 因此存在$a_1, \cdots, a_n \in f_1S \cup f_2S, b_2, \cdots, b_n \in S^1, s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S^1$ 使得:

$$\begin{aligned} f_1 &= a_1s_1, & & \\ a_1t_1 &= a_2s_2, & s_1\bar{1} &= t_1\overline{b_2}, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ a_nt_n &= f_2, & s_n\overline{b_n} &= t_n\bar{1}. \end{aligned}$$

所以$f_1 = a_1s_1(\lambda_1 \vee \lambda_2)a_1t_1b_2 = a_2s_2b_2(\lambda_1 \vee \lambda_2)a_2t_2b_3 = \cdots = a_ns_nb_n(\lambda_1 \vee \lambda_2)a_nt_n = f_2$, 即$f_1(\lambda_1 \vee \lambda_2)f_2$. 由前一命题即知$f_1 = f_2$, 所以$efg = egf$.

(3)⇒(1) 设A是右S^1-系, B是左S^1-系, 任意的$a, a' \in A$, $b, b' \in B$, 在$A \underset{S^1}{\otimes} B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$, 则存在$a_1, \cdots, a_n \in A, b_2, \cdots, b_n \in B$, $s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S^1$,使得

$$\begin{aligned} a &= a_1s_1, & & \\ a_1t_1 &= a_2s_2, & s_1b &= t_1b_2, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ a_nt_n &= a', & s_nb_n &= t_nb'. \end{aligned}$$

下面用数学归纳法证明在$(aS^1 \cup a'S^1) \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$. 约定对于$s \in S, s' \in V(s)$.

设$n = 1$. 此时,

$$a = a_1 s_1,$$
$$a_1 t_1 = a', \qquad s_1 b = t_1 b'.$$

因为S^1是正则的, 且对任意$x, y \in S, z = xx'yy'x = yy'xx'x = yy'x \in xS \cap yS, z = xx'yy'x\lambda(x, y)xx'yy'y = xx'y\lambda(x, y)xx'x = x$, 所以由定理4.5.12知所有$S^1$-系是弱平坦的. 因此由引理5.3.2知在$(aS^1 \cup a'S^1) \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$.

设$n > 1$. 如果$a_i t_i = a_{i+1} s_{i+1} \in aS^1$, 其中$i \in \{1, \cdots, n-1\}$, 则有如下的两个等式组:

$$\begin{aligned} &a = a_1 s_1, \\ &a_1 t_1 = a_2 s_2, && s_1 b = t_1 b_2, \\ &\quad \cdots\cdots && \quad \cdots\cdots \\ &a_i t_i = a_{i+1} s_{i+1}, && s_i b_i = t_i b_{i+1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &a_i t_i = a_{i+1} s_{i+1}, \\ &a_{i+1} t_{i+1} = a_{i+2} s_{i+2}, && s_{i+1} b_{i+1} = t_{i+1} b_{i+2}, \\ &\quad \cdots\cdots && \quad \cdots\cdots \\ &a_n t_n = a', && s_n b_n = t_n b'. \end{aligned}$$

由归纳假定可知, 在$(aS \cup a_{i+1} s_{i+1} S) \otimes B$中有$a \otimes b = a_{i+1} s_{i+1} \otimes b_{i+1}$; 在$(a_i t_i S \cup a'S) \otimes B$中有$a_i t_i \otimes b_{i+1} = a' \otimes b'$, 所以在$(aS \cup a'S) \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$. 即结论成立.

设$s_1 = 1$, 则$a_1 t_1 = a t_1 \in aS^1$, 所以由前面的讨论知结论成立. 设$s_i = 1 (i > 1)$, 则有

$$\begin{aligned} &a = a_1 s_1, \\ &a_1 t_1 = a_2 s_2, && s_1 b = t_1 b_2, \\ &\quad \cdots\cdots && \quad \cdots\cdots \\ &a_{i-1} t_{i-1} t_i = a_{i+1} s_{i+1}, && s_{i-1} b_{i-1} = t_{i-1} t_i b_{i+1}, \\ &\quad \cdots\cdots && \quad \cdots\cdots \\ &a_n t_n = a', && s_n b_n = t_n b'. \end{aligned}$$

由归纳假定即知结论成立. 若$t_i = 1, i \in \{1, \cdots, n\}$, 则可采用类似的证明.

所以以下假定$s_i \neq 1, t_i \neq 1, i \in \{1,\cdots,n\}$.令

$$z_1 = s_1', \qquad z_{i+1} = z_i t_i s_{i+1}', \tag{6.3.1}$$

$$z_1' = s_1, \qquad z_{i+1}' = s_{i+1} t_i' z_i', \tag{6.3.2}$$

$$w_n = t_n', \qquad w_i = w_{i+1} s_{i+1} t_i', \tag{6.3.3}$$

$$w_n' = t_n, \qquad w_i' = t_i s_{i+1}' w_{i+1}', \tag{6.3.4}$$

其中$1 \leqslant i \leqslant n-1$. 容易看出, 对任意$i \in \{1,\cdots,n\}$,有

$$w_1 s_1 = w_i z_i', \tag{6.3.5}$$

$$z_n t_n = z_i w_i', \tag{6.3.6}$$

对i利用数学归纳法可以证明: 任意$i \in \{1,\cdots,n\}$,有

$$a z_i = a_i z_i' z_i, \tag{6.3.7}$$

$$a' w_i = a_i w_i' w_i, \tag{6.3.8}$$

例如, 当$i=1$时, $a z_1 = a s_1' = a_1 s_1 s_1' = a_1 z_1' z_1$. 而

$$\begin{aligned} a z_{i+1} &= a z_i t_i s_{i+1}' = a_i z_i' z_i t_i s_{i+1}' && \text{(归纳假定)} \\ &= a_i z_i' z_i t_i t_i' t_i s_{i+1}' \\ &= a_i t_i t_i' z_i' z_i t_i s_{i+1}' \\ &= a_{i+1} s_{i+1} t_i' z_i' z_i t_i s_{i+1}' \\ &= a_{i+1} z_{i+1}' z_{i+1}. && \text{(由式(6.3.1)和式(6.3.2))} \end{aligned}$$

所以式(6.3.7)成立. 式(6.3.8)可类似地证明.

令

$$e_i = t_i' z_i' z_i t_i, \tag{6.3.9}$$

$$f_i = s_i' w_i' w_i s_i, \tag{6.3.10}$$

其中$i = 1,\cdots,n$. 设$e_i t_i' t_i s_{i+1}' s_{i+1} = t_i' t_i s_{i+1}' s_{i+1}$, 则$t_i e_i s_{i+1}' s_{i+1} = t_i t_i'$
$t_i e_i s_{i+1}' s_{i+1} = t_i e_i t_i' t_i s_{i+1}' s_{i+1} = t_i t_i' t_i s_{i+1}' s_{i+1} = t_i s_{i+1}' s_{i+1}$, 所以

$$\begin{aligned}
a_it_i &= a_{i+1}s_{i+1} = a_{i+1}s_{i+1}s'_{i+1}s_{i+1}\\
&= a_it_is'_{i+1}s_{i+1} = a_it_ie_is'_{i+1}s_{i+1}\\
&= a_it_it'_iz'_iz_it_is'_{i+1}s_{i+1} && (由式(6.3.9))\\
&= a_iz'_iz_it_is'_{i+1}s_{i+1}\\
&= az_it_is'_{i+1}s_{i+1}, && (由式(6.3.7))
\end{aligned}$$

即$a_it_i \in aS^1$. 由前面的讨论可知结论成立. 如果$f_{i+1}s'_{i+1}s_{i+1}t'_it_i = s'_{i+1}s_{i+1}t'_it_i$, 则类似的证明可知结论成立.

因此, 由条件(3)知有:

$$e_it'_it_is'_{i+1}s_{i+1} = e_is'_{i+1}s_{i+1}t'_it_i, \tag{6.3.11}$$

$$f_{i+1}t'_it_is'_{i+1}s_{i+1} = f_{i+1}s'_{i+1}s_{i+1}t'_it_i, \tag{6.3.12}$$

这里$1 \leqslant i \leqslant n-1$. 由此可得:

$$s_{i+1}e_i = z'_{i+1}z_{i+1}s_{i+1}, \tag{6.3.13}$$

$$t_if_{i+1} = w'_iw_it_i. \tag{6.3.14}$$

这是因为:

$$\begin{aligned}
t_if_{i+1} &= t_it'_it_if_{i+1}s'_{i+1}s_{i+1} && (由式(6.3.10))\\
&= t_if_{i+1}t'_it_is'_{i+1}s_{i+1}\\
&= t_if_{i+1}s'_{i+1}s_{i+1}t'_it_i && (由式(6.3.12))\\
&= t_if_{i+1}t'_it_i && (由式(6.3.10))\\
&= t_is'_{i+1}w'_{i+1}w_{i+1}s_{i+1}t'_it_i && (由式(6.3.10))\\
&= w'_iw_it_i. && (由式(6.3.3),式(6.3.4))
\end{aligned}$$

式(6.3.13)的证明类似.

如果n是奇数, 则考虑如下的等式组:

$$\begin{aligned}
&a = (as'_1)s_1, \\
&(as'_1)s_1 = a_1s_1, && s_1b = s_1b,\\
&a_1t_1 = a_2s_2, && s_1b = t_1b_2,\\
&\qquad\cdots\cdots && \qquad\cdots\cdots\\
&a_nt_n = a', && s_nb_n = t_nb'.
\end{aligned}$$

所以可以假定n是偶数.

现在证明如下的等式组成立:

$$
\begin{array}{ll}
a = (az_1)s_1, & \\
(az_1)t_1 = (az_2)s_2, & s_1b = t_1b_2, \\
\quad\cdots\cdots & \quad\cdots\cdots \\
(az_{n-1})t_{n-1} = (az_n)s_n, & s_{n-1}b_{n-1} = t_{n-1}b_n, \\
(az_n)t_n = (az_nt_nw_n)t_n, & s_nb_n = t_nb', \\
(az_nt_nw_n)s_n = (az_nt_nw_{n-1})t_{n-1}, & t_nb' = s_nb_n, \\
\quad\cdots\cdots & \quad\cdots\cdots \\
(az_nt_nw_{\frac{n}{2}+2})s_{\frac{n}{2}+2} = (az_nt_nw_{\frac{n}{2}+1})t_{\frac{n}{2}+1}, & t_{\frac{n}{2}+2}b_{\frac{n}{2}+3} = s_{\frac{n}{2}+2}b_{\frac{n}{2}+2}, \\
(az_nt_nw_{\frac{n}{2}+1})s_{\frac{n}{2}+1} = (a'w_1s_1z_{\frac{n}{2}})t_{\frac{n}{2}}, & t_{\frac{n}{2}+1}b_{\frac{n}{2}+2} = s_{\frac{n}{2}+1}b_{\frac{n}{2}+1}, \\
(a'w_1s_1z_{\frac{n}{2}})s_{\frac{n}{2}} = (a'w_1s_1z_{\frac{n}{2}-1})t_{\frac{n}{2}-1}, & t_{\frac{n}{2}}b_{\frac{n}{2}+1} = s_{\frac{n}{2}}b_{\frac{n}{2}}, \\
\quad\cdots\cdots & \quad\cdots\cdots \\
(a'w_1s_1z_2)s_2 = (a'w_1s_1z_1)t_1, & t_2b_3 = s_2b_2, \\
(a'w_1s_1z_1)s_1 = (a'w_1)s_1, & t_1b_2 = s_1b, \\
(a'w_1)t_1 = (a'w_2)s_2, & s_1b = t_1b_2, \\
\quad\cdots\cdots & \quad\cdots\cdots \\
(a'w_{n-1})t_{n-1} = (a'w_n)s_n, & s_{n-1}b_{n-1} = t_{n-1}b_n, \\
(a'w_n)t_n = a', & s_nb_n = t_nb'.
\end{array}
$$

显然右边的等式无需证明. 对于$1 \leqslant i \leqslant n-1$,

$$
\begin{aligned}
az_it_i &= a_iz_i'z_it_i && \text{(由式(6.3.7))} \\
&= a_iz_i'z_it_it_i't_i \\
&= a_it_it_i'z_i'z_it_i \\
&= a_{i+1}s_{i+1}t_i'z_i'z_it_i \\
&= a_{i+1}s_{i+1}e_i && \text{(由式(6.3.9))} \\
&= a_{i+1}z_{i+1}'z_{i+1}s_{i+1} && \text{(由式(6.3.13))} \\
&= az_{i+1}s_{i+1}. && \text{(由式(6.3.7))}
\end{aligned}
$$

对于$\frac{n}{2}+1\leqslant i\leqslant n-1$,

$$\begin{aligned}az_nt_nw_{i+1}s_{i+1}&=az_{i+1}w'_{i+1}w_{i+1}s_{i+1} &&(\text{由式(6.3.6)})\\&=az_it_is'_{i+1}w'_{i+1}w_{i+1}s_{i+1} &&(\text{由式(6.3.1)})\\&=az_it_if_{i+1} &&(\text{由式(6.3.10)})\\&=az_iw'_iw_it_i &&(\text{由式(6.3.14)})\\&=az_nt_nw_it_i. &&(\text{由式(6.3.6)})\end{aligned}$$

并且,

$$\begin{aligned}az_nt_nw_{\frac{n}{2}+1}s_{\frac{n}{2}+1}&=az_{\frac{n}{2}}w'_{\frac{n}{2}}w_{\frac{n}{2}+1}s_{\frac{n}{2}+1} &&(\text{由式(6.3.6)})\\&=a_{\frac{n}{2}}z'_{\frac{n}{2}}z_{\frac{n}{2}}w'_{\frac{n}{2}}w_{\frac{n}{2}+1}s_{\frac{n}{2}+1} &&(\text{由式(6.3.7)})\\&=a_{\frac{n}{2}}z'_{\frac{n}{2}}z_{\frac{n}{2}}t_{\frac{n}{2}}s'_{\frac{n}{2}+1}w'_{\frac{n}{2}+1}w_{\frac{n}{2}+1}s_{\frac{n}{2}+1} &&(\text{由式(6.3.4)})\\&=a_{\frac{n}{2}}z'_{\frac{n}{2}}z_{\frac{n}{2}}t_{\frac{n}{2}}f_{\frac{n}{2}+1} &&(\text{由式(6.3.10)})\\&=a_{\frac{n}{2}}z'_{\frac{n}{2}}z_{\frac{n}{2}}w'_{\frac{n}{2}}w_{\frac{n}{2}}t_{\frac{n}{2}} &&(\text{由式(6.3.14)})\\&=a_{\frac{n}{2}}w'_{\frac{n}{2}}w_{\frac{n}{2}}z'_{\frac{n}{2}}z_{\frac{n}{2}}t_{\frac{n}{2}}\\&=a'w_{\frac{n}{2}}z'_{\frac{n}{2}}z_{\frac{n}{2}}t_{\frac{n}{2}} &&(\text{由式(6.3.8)})\\&=a'w_1s_1z_{\frac{n}{2}}t_{\frac{n}{2}}. &&(\text{由式(6.3.5)})\end{aligned}$$

其他等式的证明比较简单或与上类似. 所以在$(aS^1\cup a'S^1)\otimes B$中有$a\otimes b=a'\otimes b'$. 即$B$是平坦$S^1$-系. □

该定理的一个直接推论是: 若S是逆半群, 则S^1是左、右绝对平坦的, 即定理6.1.1.

设E是右正规带, 则E是右零带的强半格, 即$E=\varphi(\Gamma;R_\alpha;\varphi_{\alpha,\beta})$, 这里$\Gamma$是半格, $R_\alpha(\alpha\in\Gamma)$是右零带, $E=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}R_\alpha, \varphi_{\alpha,\beta}:R_\alpha\to R_\beta(\alpha\geqslant\beta)$是结构同态. 称$E$具有常值结构映射, 如果当$\alpha>\beta$时, $\varphi_{\alpha,\beta}$是常值映射. 容易证明E具有常值结构映射当且仅当对于任意$e,f,g\in E$, 恒有$efg=fg$或$efg=egf$. 因此定理6.3.2可以说成: 若S是右广义逆半群, 则S^1是左绝对平坦的当且仅当$E(S)$具有常值结构映射.

推论 6.3.3　设S是完全单半群的强半格,则S^1是左绝对平坦的当且仅当S是右群的强半格且$E(S)$具有常值结构映射.

证明　设$B=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}R_\alpha$, Γ是半格, $R_\alpha(\alpha\in\Gamma)$是完全单半群. 若$S^1$是左绝对平坦的, 则类似于定理6.1.6的证明可知每个R_α是右群, 即右单左可消半群. 已知R_α是右群当且仅当R_α是群的不交并且这些群的单位元构成右零带, 所以$E(S)$是

右零带的强半格, 即$E(S)$是右正规带. 因此由定理6.3.2知$E(S)$具有常值结构映射. 反过来的证明由定理6.3.2即得. □

推论 6.3.4 设B是右正规带, 则B^1是左绝对平坦的当且仅当B具有常值结构映射.

为了考虑广义逆半群,先给出下面的引理:

引理 6.3.5 设S是幺半群, $s,t \in S$, A是右S-系, $a,a' \in A$, 则在$A \otimes S/\lambda(s,t)$中有$a\otimes\bar{1} = a'\otimes\bar{1}$的充要条件是$a = a'$, 或存在$a_1,\cdots,a_n \in A, s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n \in S$, 使得$\{s_i,t_i\} = \{s,t\}, i = 1,\cdots,n$, 且

$$a = a_1s_1,$$
$$a_1t_1 = a_2s_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_nt_n = a'.$$

证明 在A上定义关系ψ如下:

$$a\psi a' \Leftrightarrow a = a' \text{ 或存在 } a_1,\cdots,a_n \in A, s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n \in S, \text{使得}$$
$$\{s_i,t_i\} = \{s,t\}, i = 1,\cdots,n, \text{且如上等式组成立}.$$

容易验证ψ是A上的等价关系. 作映射$f : A \times S/\lambda(s,t) \to A/\psi$如下:

$$f(a,\bar{u}) = \overline{au}, \quad \forall\, a \in A, \quad \forall\, u \in S,$$

则f有定义且满足$f(ax,\bar{u}) = f(a,\overline{xu})(\forall\, x,u \in S, \forall\, a \in A)$. 所以存在映射$F : A\otimes S/\lambda(s,t) \to A/\psi$且$F$是双射. 因此$a\otimes\bar{1} = a'\otimes\bar{1} \Leftrightarrow F(a\otimes\bar{1}) = F(a'\otimes\bar{1}) \Leftrightarrow a\psi a'$. □

定理 6.3.6 设S是广义逆半群. 若S^1是左绝对平坦的, 则S是右广义逆半群.

证明 设$e,f \in E(S)$满足$efe = e, fef = f$. 下证$ef = f$.

考虑S^1-系$S^1/\lambda(e,f)$. 显然在$S^1 \underset{S^1}{\otimes} S^1/\lambda(e,f)$中有$e \otimes \bar{1} = f \otimes \bar{1}$, 所以在$(eS \cup fS) \otimes S^1/\lambda(e,f)$中有$e \otimes \bar{1} = f \otimes \bar{1}$. 由引理6.3.5知$e = f$或者存在$a_1,\cdots,a_n \in eS \cup fS$, $s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n \in S^1$, 使得$\{s_i,t_i\} = \{e,f\}, i = 1,2,\cdots,n$, 且

$$e = a_1s_1,$$
$$a_1t_1 = a_2s_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_nt_n = f.$$

显然$fs_1f = f$, 所以$a_1fe = a_1fs_1fe = a_1s_1fe = efe = e$, 归纳假定$a_{k-1}fe = e(k \geqslant 2)$, 则$a_kfe = a_kfs_kfe = a_ks_kfe = a_{k-1}t_{k-1}fe = a_{k-1}ft_{k-1}fe = a_{k-1}fe = e$. 所以由数学归纳法知对任意$i \in \{1, \cdots, n\}$, 有$a_ife = e$. 因此$a_nfe = e$. 所以$ef = a_nfef = a_nf = a_nft_nf = a_nt_nf = ff = f$.

现在设$e, f, g \in E(S)$, 令$x = efg, y = feg$. 则$x, y \in E(S)$, 且$xyx = x, yxy = y$. 所以由已证的结果知$xy = y$, 即$feg = efgfeg = efg$. 故S是右广义逆半群. □

定理 6.3.7 设S是广义逆半群, 则S^1是左绝对平坦的当且仅当S是右广义逆半群且$E(S)$具有常值结构映射.

证明 由定理6.3.2和定理6.3.6即得. □

推论 6.3.8 设B是正规带, 则B^1是左绝对平坦的当且仅当B是右正规带且具有常值结构映射.

推论 6.3.9 设B是左正规带, 则B^1是左绝对平坦的当且仅当B是半格.

证明 若B^1是左绝对平坦的, 则B是右正规带, 从而B是半格. 反过来的证明是显然的. □

§6.4 带

本节考虑左绝对平坦带,其主要结果选自文献[40].

设B是带, 称B是右正则带, 如果对于任意$x, y \in S$, 有$xyx = yx$.

定理 6.4.1 设B是带. 若B^1是左绝对平坦的, 则B是右正则带.

证明 因为任意带都是矩形带的半格, 所以可设$B = \dot{\bigcup}_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha$, 其中$\Gamma$是半格, B_α是矩形带. 对于任意$\beta \in \Gamma$,令

$$B_{[\beta)} = \dot{\cup}\{S_\alpha \mid \alpha \in \Gamma, \alpha \geqslant \beta\}.$$

则$B_{[\beta)}$是S的滤子, 所以由引理6.1.5知$B^1_{[\beta)}$是左绝对平坦的. 再由定理5.5.5即知$B_{[\beta)}$, 从而B_β的任意两个右理想有非空的交. 设$(i, \lambda), (i', \lambda') \in B_\beta$, 则$(i, \lambda)B_\beta \cap (i', \lambda')B_\beta \neq \varnothing$. 所以存在$(j, \mu), (j', \mu') \in B_\beta$, 使得$(i, \lambda)(j, \mu) = (i', \lambda')(j', \mu')$. 由此即得$i = i'$. 所以$B_\beta$为右零带. 因此$B$是右零带的半格, 故$B$是右正则带. □

所以在考虑左绝对平坦带S时, 假定S是右正则的.

设S是右正则带,则$S = \dot{\bigcup}_{\alpha \in \Gamma} S_\alpha$, 其中$\Gamma$是半格,每个$S_\alpha$是右零带, 且$S_\alpha S_\beta \subseteq S_{\alpha\beta}$, 即$S$是右零带的半格.

命题 6.4.2 设$S = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} S_\alpha$是右正则带,则以下两条是等价的:

(1) 对任意$\alpha, \beta \in \Gamma, \alpha < \beta$, 任意$u_1, v_1, \cdots, u_m, v_m \in S_\beta$, 任意右$S$-系$A$, 任意$a_1, \cdots, a_{m+1} \in A$, 如果$a_iu_i = a_{i+1}v_i (1 \leqslant i \leqslant m)$, 那么存在$w \in S_\alpha$, 使

得$a_iwu_i = a_{i+1}wv_i(1 \leqslant i \leqslant m)$;

(2) 对任意 $\alpha, \beta \in \Gamma$, $\alpha < \beta$, 任意u_1, $v_1, \cdots$, $u_m, v_m \in S_\beta$, 记$\theta_R = \theta_R((u_1, v_1), \cdots, (u_m, v_m))$为$S$的包含$(u_1, v_1), \cdots, (u_m, v_m)$的最小右同余, 则存在$w \in S_\alpha$, 使得$(wu_i, wv_i) \in \theta_R(1 \leqslant i \leqslant m)$.

证明 (1)⇒(2)令$A = S/\theta_R$, 记u_1所在的类为$\overline{u_1}$. 因为S_β是右零带, 所以, $\overline{u_1}u_i = \overline{u_1u_i} = \overline{u_i} = \overline{v_i} = \overline{u_1v_i} = \overline{u_1}v_i, 1 \leqslant i \leqslant m$. 因此由(1)知存在$w \in S_\alpha$, 使得$\overline{u_1}wu_i = \overline{u_1}wv_i(1 \leqslant i \leqslant m)$. 而$S_\alpha$是右零带, 所以$u_1w = u_1ww = w$, 故$wu_i\theta_Rwv_i(1 \leqslant i \leqslant m)$.

(2)⇒(1) 设A是任意右S-系, $a_1, \cdots, a_{m+1} \in A$, 且$a_iu_i = a_{i+1}v_i(1 \leqslant i \leqslant m)$. 由于$S_\beta$是右零带, 所以$a_iu_i = a_iv_i = a_{i+1}u_i = a_{i+1}v_i(1 \leqslant i \leqslant m)$. 对任意$s \in S_\beta$, 显然有$a_is = a_{i+1}s$, 所以$a_is = a_js, (1 \leqslant i, j \leqslant m+1)$. 对任意$s \in S_\alpha, \alpha < \beta, a_is = a_iu_iss = a_iu_is = a_{i+1}v_is = a_{i+1}s$, 所以$a_is = a_js, (1 \leqslant i, j \leqslant m+1)$. 记$\theta_R = \theta_R((u_1, v_1), (v_1, u_1), \cdots, (u_m, v_m), (v_m, u_m))$. 由(2)知存在$w \in S_\alpha$, 使得$(wu_i, wv_i) \in \theta_R(1 \leqslant i \leqslant m)$. 对任意$k \in \{1, \cdots, m\}$, 要证明$a_kwu_k = a_{k+1}wv_k$.

设$wu_k = wv_k$, 则$a_kwu_k = a_ku_kwu_k = a_{k+1}v_kwu_k = a_{k+1}v_kwv_k = a_{k+1}wv_k$. 结论成立.

设$wu_k \neq wv_k$, 则存在$s_1, \cdots, s_n \in S^1, y_1, z_1, \cdots, y_n, z_n \in S_\beta$, 使得$(y_i, z_i) \in \{(u_1, v_1), (v_1, u_1), \cdots, (u_m, v_m), (v_m, u_m)\}$, 且

$$wu_k = y_1s_1,$$

$$z_1s_1 = y_2s_2,$$

$$\cdots\cdots$$

$$z_ns_n = wv_k.$$

对任意$i \in \{1, \cdots, n\}$, 存在$j_i \in \{1, \cdots, m\}$, 使得$(y_i, z_i) \in \{(u_{j_i}, v_{j_i}), (v_{j_i}, u_{j_i})\}$. 所以有

$$\begin{aligned} a_kwu_k &= a_ky_1s_1 = a_{j_1}y_1s_1 = a_{j_1}z_1s_1 = a_{j_1}y_2s_2 = a_{j_2}y_2s_2 \\ &= a_{j_2}z_2s_2 = \cdots = a_{j_n}z_ns_n = a_{j_n}wv_k \\ &= a_{k+1}wv_k. \end{aligned}$$

□

下面是本节的主要定理.

定理 6.4.3 设S是带. 若S^1是左绝对平坦的, 则对任意$\alpha, \beta \in \Gamma, \alpha < \beta$, 任意$u_1, v_1, \cdots, u_m, v_m \in S_\beta$, 存在$w \in S_\alpha$, 使得$(wu_i, wv_i) \in \theta_R = \theta_R((u_1, v_1), \cdots, (u_m, v_m))(1 \leqslant i \leqslant m)$.

证明　S是右正则带, 所以S是右零带的半格, 即$S = \dot{\bigcup}_{\alpha\in\Gamma} S_\alpha$, 每个$S_\alpha$是右零带. 记$F = \{(u_1, v_1), \cdots, (u_m, v_m)\}$.

首先设$\theta_R(F) \cap (S_\alpha \times S_\alpha) \subseteq \Delta$($\Delta$为$S_\alpha$上的单位同余). 因为$\alpha < \beta$, 所以要证明存在$w \in S_\alpha$, 使得$wu_i = wv_i, 1 \leqslant i \leqslant m$. 类似于定理6.4.1的证明过程, 可以假定$\alpha$是$\Gamma$中的最小元. 由$\theta_R(F) \cap (S_\alpha \times S_\alpha) \subseteq \Delta$容易得到自然的包含同态$S_\alpha \hookrightarrow S/\theta_R(F)$(因为$\alpha$在$\Gamma$中最小, 所以$S_\alpha$是右$S$-系). 任取$l \in S_\alpha$. 令

$$Y = S^1 y \,\dot{\cup}\, S^1 y_1 \,\dot{\cup} \cdots \dot{\cup}\, S^1 y_m \,\dot{\cup}\, S^1 y'$$

是自由左S^1-系, $y, y_1, \cdots, y_m, y'$是其自由生成子. 记

$$G = \{(ly, u_1 y_1), (v_1 y_1, u_2 y_2), \cdots, (v_{m-1} y_{m-1}, u_m y_m), (v_m y_m, ly')\},$$

$\lambda = \lambda(G)$是由G生成的Y上的同余. 在张量积$S/\theta_R(F) \otimes S/\lambda$中有:

$$\begin{aligned}\bar{l} \otimes \bar{y} &= \overline{u_1 l} \otimes \bar{y} = \overline{u_1} \otimes \overline{ly} = \overline{u_1} \otimes \overline{u_1 y_1} = \overline{u_1} \otimes \overline{y_1} \\ &= \overline{v_1} \otimes \overline{y_1} = \overline{v_1} \otimes \overline{v_1 y_1} = \overline{v_1} \otimes \overline{u_2 y_2} = \overline{v_1 u_2} \otimes \overline{y_2} \\ &= \overline{u_2} \otimes \overline{y_2} = \overline{v_2} \otimes \overline{y_2} = \cdots = \overline{v_m} \otimes \overline{y_m} \\ &= \overline{v_m} \otimes \overline{v_m y_m} = \overline{v_m} \otimes \overline{ly'} = \overline{v_m l} \otimes \overline{y'} = \bar{l} \otimes \overline{y'}.\end{aligned}$$

因为S/λ是平坦的, 所以在$S_\alpha \otimes S/\lambda$中有$l \otimes \overline{y} = l \otimes \overline{y'}$, 因此在$S^1 \otimes S/\lambda \simeq S/\lambda$中也有$l \otimes \overline{y} = l \otimes \overline{y'}$. 故$(ly, ly') \in \lambda$. 所以存在$s_1, \cdots, s_n \in S^1, (x_1, z_1), \cdots, (x_n, z_n) \in G \cup G^{-1}$, 使得

$$\begin{aligned} ly &= s_1 x_1, \\ s_1 z_1 &= s_2 x_2, \\ &\cdots\cdots \\ s_{n-1} z_{n-1} &= s_n x_n, \\ s_n z_n &= ly'. \end{aligned}$$

假设n是最小的连接ly和ly'的自然数. 下面证明$(x_i, z_i) \in G (1 \leqslant i \leqslant n)$. 因为$ly = s_1 x_1$, 所以$x_1 = ly$, 因此$(x_1, z_1) \in G$. 假设存在$j$使得$(x_j, z_j) \in G^{-1}$, 再设$i$是这样的$j$中最小者. 因为$s_{i-1} z_{i-1} = s_i x_i$, 而$(x_{i-1}, z_{i-1}) \in G$, 所以$x_i = z_{i-1}$. 考虑以下三种情形:

(i) $z_{i-1}=u_1y_1$. 此时$s_iz_i=s_ily=ly$, 所以有:

$$
\begin{aligned}
&ly=s_{i+1}x_{i+1},\\
&s_{i+1}z_{i+1}=s_{i+2}x_{i+2},\\
&\quad\cdots\cdots\\
&s_nz_n=ly'.
\end{aligned}
$$

这与n的最小性矛盾.

(ii) $z_{i-1}=u_jy_j$, 其中$2\leqslant j\leqslant m$. 由$s_{i-1}z_{i-1}=s_ix_i$可得$s_{i-1}u_jy_j=s_iu_jy_j$, 所以$s_{i-1}u_j=s_iu_j$, 从而$s_{i-1}v_{j-1}=s_iv_{j-1}$. 所以由$x_{i-1}=v_{j-1}y_{j-1}, z_i=v_{j-1}y_{j-1}$可得$s_{i-1}x_{i-1}=s_iz_i$. 因此下面的三个等式:

$$
s_{i-2}z_{i-2}=s_{i-1}x_{i-1},\quad s_{i-1}z_{i-1}=s_ix_i,\quad s_iz_i=s_{i+1}x_{i+1}
$$

可用一个等式$s_{i-2}z_{i-2}=s_{i+1}x_{i+1}$来代替. 这和$n$的最小性矛盾.

(iii) $z_{i-1}=ly'$. 此时有$s_ix_i=s_ily'=ly'$. 又可得到一个个数较小的等式组, 矛盾. 因此有如下的等式组:

$$
\begin{aligned}
&ly=s_1ly,\\
&s_1u_1y_1=s_2v_1y_1,\\
&s_2u_2y_2=s_3v_2y_2,\\
&\quad\cdots\cdots\\
&s_mu_my_m=s_{m+1}v_my_m,\\
&s_{m+1}ly'=ly'.
\end{aligned}
$$

因为$y,y_1,\cdots,y_m,y'$是自由生成子, 所以有

$$
\begin{aligned}
&l=s_1l,\\
&s_1u_1=s_2v_1,\\
&s_2u_2=s_3v_2,\\
&\quad\cdots\cdots\\
&s_mu_m=s_{m+1}v_m,\\
&s_{m+1}l=l.
\end{aligned}
$$

令 $w=ls_1$, 则对任意 $1\leqslant i\leqslant m$, $wu_i=ls_1u_i=ls_1u_1u_i=ls_2v_1u_i=ls_2u_2u_i=\cdots=ls_iu_iu_i=ls_iu_i=ls_{i+1}v_i=(ls_{i+1}v_i)v_i=wu_iv_i=wv_i$. 此即完成了特殊情形下的证明.

最后考虑一般情形. 令

$$S_{[\alpha)} = \cup\{S_\delta | \delta \in \Gamma, \delta \geqslant \alpha\},$$
$$\theta = (\theta_R(F) \cap (S_\alpha \times S_\alpha)) \cup \Delta,$$

$S^1_{[\alpha)}$是左绝对平坦的, θ是$S_{[\alpha)}$上的同余. 所以$S^1_{[\alpha)}/\theta$也是左绝对平坦的. 由前面的证明知存在$w \in S_\alpha$, 使得$\overline{wu_i} = \overline{wv_i}(1 \leqslant i \leqslant m)$, 所以$(wu_i, wv_i) \in \theta_R(F)(1 \leqslant i \leqslant m)$. □

设S是带, 在S上定义如下的偏序:

$$e \leqslant f \Leftrightarrow ef = e = fe.$$

设$S = \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} S_\alpha$是右正则带. 称$S$满足下界条件, 如果对任意$\alpha, \beta \in \Gamma, \alpha < \beta, S_\beta$的任意有限子集合在$S_\alpha$中有下界.

定理 6.4.4 设$S = \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} S_\alpha$是右正则带, 且$\Gamma$是链. 则$S^1$是左绝对平坦的当且仅当$S$满足下界条件.

证明 设$\alpha < \beta, u_1, u_2, \cdots, u_n \in S_\beta$. 由定理6.4.3知存在$w \in S_\alpha$, 使得$(wu_1, wu_2), (wu_1, wu_3), \cdots, (wu_1, wu_n) \in \theta_R = \theta_R((u_1, u_2), (u_1, u_3), \cdots, (u_1, u_n))$. 由$(wu_1, wu_2) \in \theta_R$即知

$$wu_1 = c_1 s_1,$$
$$d_1 s_1 = c_2 s_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$d_m s_m = wu_2,$$

其中$\{c_i, d_i\} \in \{\{u_1, u_i\} \mid 2 \leqslant i \leqslant n\}, s_1, \cdots, s_m \in S$. 因为$wu_1 \in S_\alpha, c_1 \in S_\beta$, 而$\Gamma$是链, 所以$s_1 \in S_\alpha$, 因此$c_1 s_1 = c_1 s_1 s_1 = s_1$. 同理, $s_1 = d_1 s_1 = c_2 s_2 = s_2, \cdots, s_{m-1} = s_m, s_m = wu_2$, 所以$wu_1 = wu_2$. 同理可证$wu_1 = wu_3, \cdots, wu_1 = wu_n$. 令$v = wu_1$, 则$v = vu_i = u_i v(1 \leqslant i \leqslant n)$, 所以$v$是$u_1, \cdots, u_n$的下界.

反之设S满足下界条件. 设A是右S^1-系, B是左S^1-系, 任意的$a, a' \in A, b, b' \in B$, 在$A \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$, 则存在$a_1, \cdots, a_n \in A, b_2, \cdots, b_n \in B, s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S^1$,使得

$$a = a_1 s_1,$$
$$a_1 t_1 = a_2 s_2, \qquad s_1 b = t_1 b_2,$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$a_n t_n = a', \qquad s_n b_n = t_n b'.$$

下面对n利用数学归纳法证明在$(aS\cup a'S)\otimes B$中有$a\otimes b=a'\otimes b'$.

设$n=1$, 则有

$$\begin{aligned} &a=a_1s_1,\\ &a_1t_1=a', \qquad s_1b=t_1b'. \end{aligned}$$

对于任意$x,y\in S$, 令$z=xyx=yx\in xS\cap yS$, 则$(x,z)\in\lambda(x,y)$. 所以由定理4.5.11知任意S^1-系都是弱平坦的. 再由引理5.3.2知在$(aS\cup a'S)\otimes B$中有$a\otimes b=a'\otimes b'$.

设$n>1$. 假定$s_1\in S_\alpha, t_1s_2\cdots t_{n-1}s_n\in S_\beta, t_n\in S_\delta$. 若$\alpha\geqslant\beta$或$\delta\geqslant\beta$, 则类似于定理5.4.3的证明可知存在$i\in\{1,\cdots,n-1\}$, 使得$a_it_i\in aS\cup a'S$. 所以由归纳假定容易得知结论成立. 因此假定$\alpha,\delta<\beta$, 还不妨假定$\alpha\geqslant\delta$. 由下界条件可知存在$w\in S_\alpha$, 使得$wt_1=ws_2=\cdots=wt_{n-1}=ws_n=w$(类似于定理5.4.3的证明). 所以有:

$$\begin{aligned} &a=as_1,\\ &aw=aw, \qquad s_1b=wb_n.\\ &at_n=a', \qquad wb_n=t_nb'. \end{aligned}$$

这里右边两式的证明为: $s_1b=ws_1b=wt_1b_2=ws_2b_2=\cdots=ws_nb_n=wb_n, wb_n=ws_nb_n=wt_nb'=(wt_n)t_nb'=t_nb'$. 所以在$(aS\cup a'S)\otimes B$中有$a\otimes b=a'\otimes b'$. □

定理 6.4.5 设$S=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}S_\alpha$是右正则带, 且$\Gamma$中任意链的元素不超过两个, 则$S^1$是左绝对平坦的当且仅当$S$满足定理6.4.3中的条件.

证明 必要性 由定理6.4.3即得.

充分性 设A是右S^1-系, B是左S^1-系, $a,a'\in A$, $b,b'\in B$, 在$A\otimes B$中有$a\otimes b=a'\otimes b'$, 则存在$a_1,\cdots,a_n\in A, b_2,\cdots,b_n\in B$, $s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n\in S$, 使得

$$\begin{aligned} &a=a_1s_1,\\ &a_1t_1=a_2s_2, \qquad s_1b=t_1b_2,\\ &\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots\\ &a_nt_n=a', \qquad s_nb_n=t_nb'. \end{aligned}$$

下面对n利用数学归纳法证明在$(aS\cup a'S)\otimes B$中有$a\otimes b=a'\otimes b'$. 若$n=1$, 则由定理6.4.4的证明即得结论. 所以设$n>1$.

设$t_1 \in S_\alpha$, 而α是Γ中的极小元,则$s_1t_1 \in S_\alpha$. 所以$t_1 = s_1t_1t_1 = s_1t_1$, 从而$a_1t_1 = a_1s_1t_1 = at_1 \in aS \cup a'S$. 因此可得到两个个数较小的等式组, 由归纳假定即得结论. 所以下设$t_1 \in S_\alpha$, 而α是Γ中的极大元. 若Γ中再没有极大元, 则Γ是链, 从而由定理6.4.4知S^1是左绝对平坦的. 故设Γ中还有极大元β. 令$\delta = \alpha\beta$, 则$\delta < \alpha$. 若$s_1 \in S_\alpha$, 则由于S_α是右零带, 所以$t_1 = s_1t_1$, 从而$a_1t_1 = a_1s_1t_1 = at_1 \in aS \cup a'S$. 类似于前面的讨论可知结论成立. 所以假设$s_1 \notin S_\alpha$. 设$i$是最小自然数使得对于任意$1 \leqslant j \leqslant i, t_j \in S_\alpha$. 若存在$1 \leqslant j \leqslant i$, 使得$s_{j+1} \in S_\beta$, 其中$\beta$也是$\Gamma$中的极大元, 则$t_js_{j+1} \in S_{\alpha\beta} = S_\delta$. 由$a_jt_j = a_{j+1}s_{j+1}$得$a_jt_j = a_{j+1}s_{j+1} = a_jt_js_{j+1}$. 由$\delta$的极小性容易得到$s_jt_js_{j+1} \in S_\delta$, 所以$t_js_{j+1} = s_jt_js_{j+1}$, 故$a_jt_j = a_js_jt_js_{j+1} = a_{j-1}t_{j-1}t_js_{j+1}$. 同理, $t_{j-1}t_js_{j+1}, s_{j-1}t_{j-1}t_js_{j+1} \in S_\delta$, 所以$a_jt_j = a_{j-1}s_{j-1}t_{j-1}t_js_{j+1}$. 这样一直做下去就可证明$a_jt_j \in aS \cup a'S$. 所以由归纳假定容易证明结论成立. 若$\beta$是极小元, 则可类似地证明. 所以假定$s_{j+1} \in S_\alpha(1 \leqslant j \leqslant i)$. 这样就有$t_1, s_2, \cdots, t_i, s_{i+1} \in S_\alpha$. 所以由命题6.4.2知存在$w \in S_\delta$, 使得$a_jwt_j = a_{j+1}ws_{j+1}, 1 \leqslant j \leqslant i$. 故有:

$$
\begin{array}{ll}
a = a_1s_1, & \\
a_1(wt_1) = a_2(ws_2), & s_1b = (wt_1)b_2, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
a_i(wt_i) = a_{i+1}(ws_{i+1}), & (ws_i)b_i = (wt_i)b_{i+1}, \\
a_{i+1}t_{i+1} = a_{i+2}s_{i+2}, & (ws_{i+1})b_{i+1} = t_{i+1}b_{i+2}, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
a_nt_n = a', & s_nb_n = t_nb'.
\end{array}
$$

(若$i = n$, 则$a_{n-1}t_{n-1} = a_ns_n = a_nt_ns_n = a's_n \in aS \cup a'S$, 故结论也成立. 所以不妨设$i < n$). 等式$s_1b = wt_1b_2$的证明为: $s_1b = t_1s_1b = wt_1s_1b = wt_1b_2$(因为$s_1 \notin S_\alpha$, 所以$t_1s_1 \in S_\delta$). 等式$ws_{i+1}b_{i+1} = t_{i+1}b_{i+2}$的证明为: $t_{i+1}b_{i+2} = s_{i+1}b_{i+1} = t_{i+1}s_{i+1}b_{i+1} = wt_{i+1}s_{i+1}b_{i+1} = ws_{i+1}b_{i+1}$(因为$s_{i+1} \in S_\alpha, t_{i+1} \notin S_\alpha$, 所以$t_{i+1}s_{i+1} \in S_\delta$). 因为$wt_1 \in S_\delta, s_1w \in S_\delta$, 所以$wt_1 = s_1wwt_1 = s_1wt_1$, 从而$a_1wt_1 = a_1s_1wt_1 = awt_1 \in aS \cup a'S$. 所以由归纳假定可知结论成立. □

由定理6.4.4知当Γ是链时, S^1是左绝对平坦的当且仅当S满足下界条件. 下面给出例子说明对于一般的右正则带, 当S^1是左绝对平坦幺半群时, S不一定满足下界条件.

例 6.4.6 设$S = S_\alpha \cup S_\beta \cup S_\delta$, 这里$S_\alpha = \{a, b\}, S_\beta = \{c\}, S_\delta = \{d, e\}, \delta = \alpha\beta$. 乘法表如下:

	a	b	c	d	e
a	a	b	d	d	e
b	a	b	e	d	e
c	d	e	c	d	e
d	d	e	d	d	e
e	d	e	e	d	e

S_α中的元素$\{a,b\}$在S_δ中没有下界，所以S不满足下界条件. 容易证明S满足命题6.4.2中的条件(2). 所以由定理6.4.5即知S^1是左绝对平坦幺半群.

§6.5 全变换半群

设X是集合，所有X到X的映射构成的集合按照映射的合成(从左到右)构成一个半群，叫做集合X上的全变换半群，记为$\mathscr{T}(X)$.

对于任意$x \in X$，任意$s \in \mathscr{T}(X)$. 本节中记x在s下的像为xs. 对于$s \in \mathscr{T}(X)$. 如下定义X上的关系π_s：

$$x\pi_s y \Leftrightarrow xs = ys, \quad \forall\, x, y \in X,$$

则π_s是X上的等价关系.

下面是$\mathscr{T}(X)$的基本性质.

命题 6.5.1 设$s, t \in \mathscr{T}(X)$. 则存在$u \in \mathscr{T}(X)$，使得$us = t$的充要条件是$Xt \subseteq Xs$. 此时记为$t \leqslant_{\mathscr{L}} s$. 所以$s\mathscr{L}t \Leftrightarrow Xs = Xt$.

证明 若$us = t$，则$Xt = X(us) = (Xu)s \subseteq Xs$. 反之设$Xt \subseteq Xs$. 对于任意$y \in Xt, y \in Xs$. 取定元素$x_y \in X$，使得$x_y s = y$. 如下规定$u \in \mathscr{T}(X)$: 对任意$x \in X$，令$y = xt \in Xs$，规定$xu = x_y$. 显然$xus = x_y s = y = xt$，所以$us = t$. □

命题 6.5.2 设$s, t \in \mathscr{T}(X)$. 则存在$v \in \mathscr{T}(X)$，使得$sv = t$的充要条件是$\pi_s \subseteq \pi_t$. 此时记为$t \leqslant_{\mathscr{R}} s$. 所以$s\mathscr{R}t \Leftrightarrow \pi_s = \pi_t$.

证明 设$sv = t$. 若$x, y \in X$，使得$x\pi_s y$，则$xs = ys$，所以$xt = yt$，即$x\pi_t y$. 反之设$\pi_s \subseteq \pi_t$. 如下规定$v : X \to X$：

$$(xs)v = xt, \qquad \forall\, xs \in Xs,$$
$$xv = x, \qquad \forall\, x \in X - Xs.$$

若$xs = ys$, 则$xt = yt$, 所以v是映射. 显然$sv = t$. □

设$s, t \in \mathscr{T}(X)$, 记$s <_{\mathscr{R}} t$为$s \leqslant_{\mathscr{R}} t$但$(s,t) \notin \mathscr{R}$. 同样可定义$s <_{\mathscr{L}} t$.

引理 6.5.3 设X是集合,$s, t \in \mathscr{T}(X)$且$s \nleqslant_{\mathscr{R}} t$, 则存在$s^* \in V(s), t^* \in V(t)$, 使得$ss^*tt^*s <_{\mathscr{R}} s$.

证明 设$s \nleqslant_{\mathscr{R}} t$. 由命题6.5.2知存在$x, y \in X$, 使得$xt = yt$但$xs \neq ys$. 存在$t^* \in V(t)$, 使得$x(tt^*) = y(tt^*) = x$, 又存在$s^* \in V(s)$, 使得$x(ss^*) = x, y(ss^*) = y$. 令$s' = ss^*tt^*s$, 则$s' \leqslant_{\mathscr{R}} s$. 又因为$xs' = ys'$, 但$xs \neq ys$, 所以$\pi_s \neq \pi_{s'}$. 由命题6.5.2即知$(s, s') \notin \mathscr{R}$. □

设$S = \mathscr{T}(X)$, 设A是右S-系, B是左S-系, 任意的$a, a' \in A$, $b, b' \in B$, 在$A \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$, 则存在$a_1, \cdots, a_n \in A, b_2, \cdots, b_n \in B, s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$, 使得

$$\begin{aligned}
&a = a_1 s_1, & & \\
&a_1 t_1 = a_2 s_2, & & s_1 b = t_1 b_2, \\
&\quad \cdots\cdots & & \quad\cdots\cdots \\
&a_n t_n = a', & & s_n b_n = t_n b'.
\end{aligned}$$

引理 6.5.4 设 X 是有限集合. 在如上记号下, 存在 $c_1, \cdots, c_m \in aS, s_1', u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m \in S$, 使得:

$$\begin{aligned}
&a = c_1 u_1, & & u_1 b = v_1 b, \\
&c_1 v_1 = c_2 u_2, & & u_2 b = v_2 b, \\
&\quad\cdots\cdots & & \quad\cdots\cdots \\
&c_{m-1} v_{m-1} = c_m u_m, & & u_m b = v_m b, \\
&c_m v_m = a_1 s_1', & & s_1' b = t_1 b_2, \\
&s_1' \leqslant_{\mathscr{R}} t_1. & &
\end{aligned}$$

证明 若$s_1 \leqslant_{\mathscr{R}} t_1$, 则有

$$\begin{aligned}
&a = a_1 s_1, & & s_1 b = t_1 b_2, \\
&s_1 \leqslant_{\mathscr{R}} t_1. & &
\end{aligned}$$

所以结论成立. 设$s_1 \nleqslant_{\mathscr{R}} t_1$, 则由命题6.5.3知存在$s_1^* \in V(s_1)$, $t_1^* \in V(t_1)$, 使得$s_1 s_1^* t_1 t_1^* s_1 <_{\mathscr{R}} s_1$. 令$s_1' = s_1 s_1^* t_1 t_1^* s_1$, 则有

$$\begin{aligned}
&a = a(s_1^* s_1), & & (s_1^* s_1) b = (s_1^* t_1 t_1^* s_1) b, \\
&a(s_1^* t_1 t_1^* s_1) = a_1 s_1', & & s_1' b = t_1 b_2.
\end{aligned}$$

这里后两式的证明如下: $a(s_1^*t_1t_1^*s_1)=a_1s_1s_1^*t_1t_1^*s_1=a_1s_1'$; $s_1'b=s_1s_1^*t_1t_1^*s_1b=s_1s_1^*t_1t_1^*t_1b_2=s_1s_1^*t_1b_2=s_1s_1^*s_1b=s_1b=t_1b_2$. 若$s_1'\leqslant_{\mathscr{R}}t_1$, 则结论成立.否则设$s_1'\not\leqslant_{\mathscr{R}}t_1$. 同上类似的证明过程继续下去. 因为$X$是有限集合, 所以$\mathscr{T}(X)$是有限半群,故总存在自然数$m$,使得引理6.5.4成立. □

下面是本节的主要结果.

定理 6.5.5 设X是集合, $S=\mathscr{T}(X)$是X上的全变换半群,则以下几条是等价的:

(1) S是左绝对平坦幺半群;

(2) 所有左S-系是弱平坦的;

(3) X是有限集合.

证明 (1)⇒(2)显然.

(3)⇒(1) 设A是右S-系, B是左S-系, $a,a'\in A$, $b,b'\in B$, 在$A\otimes B$中有$a\otimes b=a'\otimes b'$, 则存在$a_1,\cdots,a_n\in A,b_2,\cdots,b_n\in B$, $s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n\in S$, 使得

$$\begin{aligned}
&a=a_1s_1,\\
&a_1t_1=a_2s_2, \qquad s_1b=t_1b_2,\\
&\quad\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots\\
&a_nt_n=a', \qquad s_nb_n=t_nb'.
\end{aligned}\tag{6.5.1}$$

对n用数学归纳法证明在$(aS\cup a'S)\otimes B$中有$a\otimes b=a'\otimes b'$.

对等式组(6.5.1)利用引理6.5.4,可得如下的等式组:

$$\begin{aligned}
&c_mv_m=a_1s_1',\\
&a_1t_1=a_2s_2, \qquad s_1'b=t_1b_2,\\
&\quad\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots\\
&a_nt_n=a', \qquad s_nb_n=t_nb'.
\end{aligned}$$

又由引理6.5.4知在$(aS\cup a'S)\otimes B$中有$a\otimes b=a_1s_1'\otimes b=c_mv_m\otimes b$. 所以不失一般性, 可以假定$s_1\leqslant_{\mathscr{R}}t_1$.

设$n=1$. 此时有

$$\begin{aligned}
&a=a_1s_1,\\
&a_1t_1=a', \qquad s_1b=t_1b',
\end{aligned}$$

因为$s_1\leqslant_{\mathscr{R}}t_1$, 所以由命题6.5.2知存在$u\in S$, 使得$s_1=t_1u$. 因此有

$$\begin{aligned}
&a=a'(t_1^*t_1u),\\
&a'(t_1^*t_1)=a', \qquad (t_1^*t_1u)b=(t_1^*t_1)b',
\end{aligned}$$

这里不显然的两个等式的证明为: $a = a_1s_1 = a_1t_1u = a_1t_1t_1^*t_1u = a'(t_1^*t_1u)$; $(t_1^*t_1u)b = t_1^*s_1b = t_1^*t_1b'$. 所以在$(aS \cup a'S) \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$.

设$n \geqslant 2$. 记

$$m = \sum_{i=1}^{n}|Xs_i| + \sum_{i=1}^{n}|Xt_i|,$$

显然$m \geqslant 2n$. 下面对m用数学归纳法.

设$m = 2n$. 此时s_i, t_i皆为X上的常值映射, 所以有$a = (a_1s_1)s_1, (a_is_i)t_i = a_it_i = a_{i+1}s_{i+1} = (a_{i+1}s_{i+1})s_{i+1}, 1 \leqslant i \leqslant n-1, (a_ns_n)t_n = a'$. 因此将等式组(6.5.1)中的$a_i$换成$a_is_i(i = 1, \cdots, n)$, 就可得到两个个数较少的等式组(例如前两行等式一组, 后$2n-1$个等式一组).由归纳假定容易证明结论成立.

设$m > 2n$.先证明几个引理.

引理 6.5.6　设存在$1 \leqslant i \leqslant n-1$, 使得$s_i \leqslant_{\mathscr{R}} t_i, s_{i+1} \leqslant_{\mathscr{L}} t_i$, 则结论成立(即在$(aS \cup a'S) \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$).

证明　由条件知$s_i = t_iu = t_it_i^*t_iu = t_it_i^*s_i, s_{i+1} = vt_i = vt_it_i^*t_i = s_{i+1}t_i^*t_i$, 这里$t_i^* \in V(t_i)$. 所以有$a_{i-1}t_{i-1} = a_is_i = a_it_it_i^*s_i = a_{i+1}s_{i+1}t_i^*s_i = a_{i+1}(s_{i+1}t_i^*s_i), (s_{i+1}t_i^*s_i)b_i = s_{i+1}t_i^*t_ib_{i+1} = s_{i+1}b_{i+1} = t_{i+1}b_{i+2}$. 因此式(6.5.1)中的如下等式组:

$$\begin{aligned} &a_{i-1}t_{i-1} = a_is_i, && \\ &a_it_i = a_{i+1}s_{i+1}, && s_ib_i = t_ib_{i+1}, \\ &a_{i+1}t_{i+1} = a_{i+2}s_{i+2}, && s_{i+1}b_{i+1} = t_{i+1}b_{i+2}. \end{aligned} \tag{6.5.2}$$

可用如下等式组来代替:

$$\begin{aligned} &a_{i-1}t_{i-1} = a_{i+1}(s_{i+1}t_i^*s_i), && \\ &a_{i+1}t_{i+1} = a_{i+2}s_{i+2}, && (s_{i+1}t_i^*s_i)b_i = t_{i+1}b_{i+2}. \end{aligned}$$

在上述讨论中, 当$i = 1$时, $a_{i-1}t_{i-1} = a$, 当$i = n-1$时, $b_{i+2} = b'$. 所以由归纳假定即知在$(aS \cup a'S) \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$.　□

引理 6.5.7　设存在$1 \leqslant i \leqslant n-1$, 使得$s_i <_{\mathscr{R}} t_i \nleqslant_{\mathscr{L}} s_{i+1}$, 则结论成立.

证明　由$t_i \nleqslant_{\mathscr{L}} s_{i+1}$知存在$x \in X$, 使得$xt_i \in X - Xs_{i+1}$. 若$|Xt_i| = 1$, 则对任意$x, y \in X, xt_i = yt_i$. 又因为$s_i <_{\mathscr{R}} t_i$, 所以$\pi_{t_i} \subseteq \pi_{s_i}$. 因此对任意$x, y \in X$, 有$xs_i = ys_i$. 即$|Xs_i| = 1$. 所以$t_i\mathscr{R}s_i$. 这与$s_i <_{\mathscr{R}} t_i$矛盾. 因此$|Xt_i| \geqslant 2$. 所以存在$y \in X$, 使得$xt_i \neq yt_i$. 记$x\pi_{t_i} = \{z \in X | xt_i = zt_i\}$. 定义$u, v \in \mathscr{T}(X)$如下:

$$wu = \begin{cases} y, & w \in x\pi_{t_i}, \\ w, & \text{否则}, \end{cases} \qquad \forall\, w \in X,$$

$$wv = \begin{cases} yt_i, & w = xt_i, \\ w, & \text{否则}, \end{cases} \qquad \forall\, w \in X.$$

显然$ut_i = t_iv$. 所以$a_i(ut_i) = a_it_iv = a_{i+1}s_{i+1}v = a_{i+1}s_{i+1} = a_it_i$(由$V$的定义及$xt_i \in X - Xs_{i+1}$知$s_{i+1}v = s_{i+1}$). 又因为$s_i <_{\mathscr{R}} t_i$, 所以存在$w \in S$, 使得$t_iw = s_i$, 因此$a_{i-1}t_{i-1} = a_is_i = a_it_iw = a_{i+1}s_{i+1}w = a_{i+1}s_{i+1}vw = a_it_ivw = a_iut_iw = a_i(us_i)$; 且$(us_i)b_i = u(s_ib_i) = u(t_ib_{i+1}) = (ut_i)b_{i+1}$, 故等式组(6.5.2)中的前两行等式可用如下等式组来代替:

$$a_{i-1}t_{i-1} = a_i(us_i),$$

$$a_i(ut_i) = a_{i+1}s_{i+1}, \qquad (us_i)b_i = (ut_i)b_{i+1},$$

和引理6.5.6的证明一样, 若$i = 1$, 则$a_{i-1}t_{i-1} = a, b_1 = b$. 显然$|Xut_i| \leqslant |Xt_i|$. 又$xut_i = yt_i = yut_i$, 而$xt_i \neq yt_i$, 所以$|Xut_i| \lneqq |Xt_i|$. 因此由对$m$的归纳假定知在$(aS \cup a'S) \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$. □

引理 6.5.8 设存在$1 \leqslant i \leqslant n-1$, 使得$t_i \leqslant_{\mathscr{L}} s_{i+1}, t_{i+1} \leqslant_{\mathscr{R}} s_{i+1}$, 则结论成立.

证明 由条件有$t_i = us_{i+1} = us_{i+1}s_{i+1}^*s_{i+1} = t_is_{i+1}^*s_{i+1}, t_{i+1} = s_{i+1}v = s_{i+1}s_{i+1}^*s_{i+1}v = s_{i+1}s_{i+1}^*t_{i+1}$, 所以等式组(6.5.2)可用如下的等式组来代替:

$$a_{i-1}t_{i-1} = a_is_i,$$

$$a_i(t_is_{i+1}^*t_{i+1}) = a_{i+2}s_{i+2}, \qquad s_ib_i = (t_is_{i+1}^*t_{i+1})b_{i+2},$$

后两个等式的证明如下: $a_i(t_is_{i+1}^*t_{i+1}) = a_it_is_{i+1}^*t_{i+1} = a_{i+1}s_{i+1}s_{i+1}^*t_{i+1} = a_{i+1}t_{i+1} = a_{i+2}s_{i+2}$; $s_ib_i = t_ib_{i+1} = t_is_{i+1}s_{i+1}^*b_{i+1} = (t_is_{i+1}^*t_{i+1})b_{i+2}$. 所以由归纳假定即知结论成立. □

引理 6.5.9 设存在$1 \leqslant i \leqslant n-1$, 使得$t_i \leqslant_{\mathscr{L}} s_{i+1} \not\leqslant_{\mathscr{R}} t_{i+1}$, 则结论成立.

证明 因为$s_{i+1} \not\leqslant_{\mathscr{R}} t_{i+1}$, 所以由引理6.5.3知存在$s_{i+1}^* \in V(s_{i+1}), t_{i+1}^* \in V(t_{i+1})$, 使得:

$$s_{i+1}s_{i+1}^*t_{i+1}t_{i+1}^*s_{i+1} <_{\mathscr{R}} s_{i+1}.$$

令$u = s_{i+1}s_{i+1}^*t_{i+1}t_{i+1}^*s_{i+1}, v = t_is_{i+1}^*t_{i+1}t_{i+1}^*s_{i+1}$,则有

$$a_{i-1}t_{i-1} = a_is_i,$$

$$a_iv = a_{i+1}u, \qquad s_ib_i = vb_{i+1},$$

$$a_{i+1}t_{i+1} = a_{i+2}s_{i+2}, \qquad ub_{i+1} = t_{i+1}b_{i+2},$$

这里, 当$i = n-1$时, 规定$b_{i+2} = b', a_{i+2}s_{i+2} = a'$, 当$i = 1$时作同前一样的规定. 不明显的三个等式的证明如下:

$$\begin{aligned}
a_i v &= a_i(t_i s_{i+1}^* t_{i+1} t_{i+1}^* s_{i+1}) \\
&= a_{i+1} s_{i+1} s_{i+1}^* t_{i+1} t_{i+1}^* s_{i+1} \\
&= a_{i+1} u; \\
s_i b_i &= t_i b_{i+1} = t_i s_{i+1}^* s_{i+1} b_{i+1} \qquad\qquad (t_i \leqslant_{\mathscr{L}} s_{i+1}) \\
&= t_i s_{i+1}^* t_{i+1} b_{i+2} \\
&= t_i s_{i+1}^* t_{i+1} t_{i+1}^* t_{i+1} b_{i+2} \\
&= t_i s_{i+1}^* t_{i+1} t_{i+1}^* s_{i+1} b_{i+1} \\
&= v b_{i+1}; \\
u b_{i+1} &= s_{i+1} s_{i+1}^* t_{i+1} t_{i+1}^* s_{i+1} b_{i+1} \\
&= s_{i+1} s_{i+1}^* t_{i+1} t_{i+1}^* t_{i+1} b_{i+2} \\
&= s_{i+1} s_{i+1}^* t_{i+1} b_{i+2} \\
&= s_{i+1} s_{i+1}^* s_{i+1} b_{i+1} \\
&= s_{i+1} b_{i+1} = t_{i+1} b_{i+2}.
\end{aligned}$$

由u, v的定义知有$|Xu| \leqslant |Xs_{i+1}|, |Xv| \leqslant |Xt_i|$. 又因为$u <_{\mathscr{R}} s_{i+1}$, 所以$\pi_{s_{i+1}} \subseteq \pi_u$, 但$(u, s_{i+1}) \notin \mathscr{R}$. 故由命题6.5.2知存在$x, y \in X$, 使得$xu = yu$但$xs_{i+1} \neq ys_{i+1}$. 这说明$|Xu| \neq |Xs_{i+1}|$. 所以由对$m$的归纳假定知结论成立. □

引理 6.5.10 若$s_1 \mathscr{R} t_1$, 则结论成立.

证明 因为$s_1 \mathscr{R} t_1$, 所以存在$u \in S$, 使得$t_1 = s_1 u$, 故$a_1 t_1 = a_1 s_1 u = au \in aS$, 从而结论成立. □

定理6.5.5的证明(续) 由引理6.5.10, 可以假定$s_1 <_{\mathscr{R}} t_1$. 若$t_1 \nleqslant_{\mathscr{L}} s_2$, 则由引理6.5.7知结论成立. 故设$t_1 \leqslant_{\mathscr{L}} s_2$. 若$t_1 \mathscr{L} s_2$, 则$s_2 \leqslant_{\mathscr{L}} t_1$, 所以由引理6.5.6知结论成立. 所以可以假设$t_1 <_{\mathscr{L}} s_2$. 同样由引理6.5.8, 引理6.5.9可知只需考虑$s_2 <_{\mathscr{R}} t_2$的情形. 上述讨论继续下去, 可以假设$s_n <_{\mathscr{R}} t_n$. 由引理6.5.4知存在$t_n' \in S, c_1, \cdots .c_q \in a'S, u_1, v_1, \cdots, u_q, v_q \in S$, 使得

$$\begin{aligned}
a' &= c_1 u_1, \qquad & u_1 b' &= v_1 b', \\
c_1 v_1 &= c_2 u_2, \qquad & u_2 b' &= v_2 b',
\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$c_{q-1}v_{q-1} = c_q v_q, u_q b' = v_q b',$$
$$c_q v_q = a_n t'_n, \qquad t'_n b' = s_n b_n,$$
$$t'_n \leqslant_{\mathscr{R}} s_n.$$

所以有如下的等式组:

$$\begin{aligned} &a = a_1 s_1, \\ &a_1 t_1 = a_2 s_2, && s_1 b = t_1 b_2, \\ &\cdots\cdots && \cdots\cdots \\ &a_{n-1} t_{n-1} = a_n s_n, && s_{n-1} b_{n-1} = t_{n-1} b_n, \\ &a_n t'_n = a_n t'_n, && s_n b_n = t'_n b'. \end{aligned}$$

因为$t'_n \leqslant_{\mathscr{R}} s_n <_{\mathscr{R}} t_n$, 所以$|Xt'_n| < |Xt_n|$. 由归纳假定即知在$(aS \cup a_n t'_n S) \otimes B$中有$a \otimes b = a_n t'_n \otimes b'$. 而$a_n t'_n = c_q v_q \in a'S$, 所以在$(aS \cup a'S) \otimes B$中有$a \otimes b = a_n t'_n \otimes b'$. 又有$a' \otimes b' = a_n t'_n \otimes b'$(在$a'S \otimes B$中), 所以在$(aS \cup a'S) \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$.

(2)⇒(3) 设X是无限集合,$\sigma : X \to \mathbb{Z}$是任意满射. 令$X_i = \sigma^{-1}(\{2i, 2i+1\}), Y_i = \sigma^{-1}(\{2i-1, 2i\}), i \in \mathbb{Z}$. 则$X_i, Y_i$满足下述条件:

(i) $X_i \subseteq Y_i \cup Y_{i+1}, Y_i \subseteq X_{i-1} \cup X_i, \ \forall\, i \in \mathbb{Z}$,

(ii) $X_i \cap Y_{i+1} \neq \varnothing, X_i \cap Y_i \neq \varnothing, \ \forall\, i \in \mathbb{Z}$.

任意固定$x_i \in X_i, y_i \in Y_i, i \in \mathbb{Z}$,如下定义$\alpha, \beta \in S$:

$$x\alpha = x_i, \qquad \text{如果 } x \in X_i,$$
$$x\beta = y_i, \qquad \text{如果 } x \in Y_i,$$

容易证明(利用(ii))有$\mathrm{Ker}\alpha \vee \mathrm{Ker}\beta = X \times X$, 所以$\alpha S \cap \beta S$中的元素都是常值映射. 如果所有$S$-系都是弱平坦的, 则由定理4.5.12知存在$s \in \alpha S \cap \beta S$, 使得$(s, \alpha) \in \lambda(\alpha, \beta)$, 这里$\lambda(\alpha, \beta)$是$S$上的由$(\alpha, \beta)$生成的最小左同余. 因为$s \neq \alpha$, 所以存在$t_1, \cdots, t_n, u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n \in S$, 使得

$$s = t_1 u_1, t_1 v_1 = t_2 u_2, \cdots, t_{n-1} v_{n-1} = t_n u_n, t_n v_n = \alpha,$$

且$\{u_i, v_i\} = \{\alpha, \beta\}, 1 \leqslant i \leqslant n$.

引理 6.5.11　对任意$t \in S$, $|Xtu_i| = \infty$当且仅当$|Xtv_i| = \infty$.

证明　若$|Xt\alpha| = \infty$, 则Xt和无穷多个X_i有交, 所以由(i)知Xt和无穷多个Y_i有交, 故$|Xt\beta| = \infty$. 反之, 若$|Xt\beta| = \infty$, 则同样的讨论可知$|Xt\alpha| = \infty$. 注意到$\{u_i, v_i\} = \{\alpha, \beta\}$, 结论即得证.

定理6.5.5的证明(又续)　$|X\alpha| = \infty \Rightarrow |Xt_nv_n| = \infty \Rightarrow |Xt_nu_n| = \infty \Rightarrow |Xt_{n-1}v_{n-1}| = \infty \Rightarrow \cdots \Rightarrow |Xt_1v_1| = \infty \Rightarrow |Xt_1u_1| = \infty \Rightarrow |Xs| = \infty$. 这与$s \in \alpha S \cap \beta S$ 矛盾. 所以X是有限集合. □

定理6.5.5中的(1)⇒(3)是Shoji [233]文章中的结果, Shoji [237]的另一篇文章中又对该结果进行了推广.

第7章 正 则 性

§7.1 正则S-系

定义 7.1.1 设A是S-系, $a \in A$,称a是A中的正则元, 如果存在S-同态$f: Sa \to S$使得

$$f(a)a = a.$$

设S是正则幺半群,$s \in S$,则存在$s' \in S$,使得$s = ss's$.作映射$f : Ss \to S$为$f(ts) = tss'$.容易证明f是S-同态,并且$f(s)s = ss's = s$,所以s是左S-系${}_SS$中的正则元.

注意幺半群S中的正则元和左S-系${}_SS$中的正则元是不一致的, 前者是指von Neumann 正则,而后者是指定义7.1.1意义下的正则.

下面是S-系的正则元的基本性质.

命题 7.1.2 设A是S-系, $a \in A$. 以下几条等价:

(1) a是A中的正则元;

(2) 存在$e \in E(S)$,使得$ea = a$,并且对任意$p, q \in S$,若$pa = qa$, 则$pe = qe$;

(3) Sa是投射S-系.

证明 (1)⇒(2)设$f : Sa \to S$是S-同态并且满足$f(a)a = a$, 记$e = f(a) \in S$. 则$f(a) = f(f(a)a) = f(a)f(a)$, 所以$e \in E(S)$. 显然$ea = a$. 设$p, q \in S$, 使得$pa = qa$, 则$pe = pf(a) = f(pa) = f(qa) = qf(a) = qe$.

(2)⇒(3)作映射$\varphi : Sa \to Se$如下:

$$\varphi(sa) = se, \quad \forall\, s \in S.$$

则条件(2)易知φ是有定义的. 若$se = te$, 则$sa = sea = tea = ta$, 所以φ是单的. 显然φ是S-满同态. 所以$\varphi : Sa \to Se$是同构, 因此Sa是投射的.

(3)⇒(1)设Sa是投射的, 则存在S-同构$\varphi : Sa \to Se$, 其中$e \in E(S)$. 设$\varphi(a) = s, \varphi(ta) = e$, 则$ets = et\varphi(a) = e\varphi(ta) = e \cdot e = e$, 所以$setset = seet = set$, 即$set \in E(S)$. 令$g = set$. 作映射$\alpha : Sa \to Sg$为$\alpha(xa) = xg$. 若$xa = ya$, 则$xs = ys$, 所以$xg = yg$. 这说明$\alpha$是有定义的. 显然$\alpha$是$S$-同

态, 并且$\alpha(a) = g$. 设$xg = yg$, 则$xa = x\varphi^{-1}(s) = x\varphi^{-1}(se) = xse\varphi^{-1}(e) = xseta = xga = yga = yseta = yse\varphi^{-1}(e) = y\varphi^{-1}(se) = y\varphi^{-1}(s) = ya$, 所以$\alpha$是单的, 从而$\alpha$是$S$ -同构. 因为:

$$\alpha(\alpha(a)a) = \alpha(a)\alpha(a) = g \cdot g = g = \alpha(a),$$

所以$\alpha(a)a = a$. 这说明a是A中的正则元. □

定义 7.1.3 设A是S -系, 如果A中的所有元素都是A的正则元, 则称A是正则S -系.

命题7.1.2的一个显然推论是

推论 7.1.4 S -系A是正则的当且仅当A的任意循环子系是投射的.

下面给出正则S -系的一些例子.

例 7.1.5 (1)若S是正则幺半群, 则${}_SS$是正则S -系.

(2) 设S是右可消幺半群, 则容易证明${}_SS$也是正则S -系. 实际上由下面的命题7.1.6可知此时任意投射S -系都是正则的.

(3) 设X是集合, $\mathscr{T}(X)$是X上的全变换幺半群. 设$x \in X$, 作映射$c_x : X \to X, c_x(y) = x, \forall\ y \in X$,则$c_x \in E(\mathscr{T}(X))$. 容易证明$\mathscr{T}(X)x \simeq \mathscr{T}(X)c_x$, 所以$\mathscr{T}(X)x$是投射$\mathscr{T}(X)$-系, 从而由推论7.1.4知$X$是正则$\mathscr{T}(X)$-系.

(4) 设$S = \{1, 0, u, v, w\}$, 非平凡部分乘法表为:

	u	v	w
u	0	0	0
v	u	v	w
w	u	v	w

可以证明S是幺半群. 显然$u \in S$既不是S的右可消元, 也不是von Neumann正则元. 但左S -系${}_SS$是正则的. 这是因为: 首先$1, 0, v, w$都是${}_SS$的正则元(因为它们都是幺半群S的正则元). 显然$vu = u$. 设$x, y \in S$, 使得$xu = yu$, 则由乘法表容易看出有$xv = yv$. 所以由命题7.1.2知u也是${}_SS$的正则元, 从而${}_SS$是正则S -系.

命题 7.1.6 正则S -系的任意子系仍是正则系. 正则S -系的余直积仍是正则系.

证明 由定义及命题7.1.2即得. □

设A是S -系, $a \in A$. 引进如下记号:

$$\begin{aligned}\underline{M}_a &= \{e \in E(S) | ea = a, \text{并且}\forall\ x, y \in S,\ xa = ya \Rightarrow xe = ye\} \\ &= \{e \in E(S) | a \text{ 是 } e\text{可消的}\}.\end{aligned}$$

由命题7.1.2即得

命题 7.1.7 S-系A是正则的当且仅当对任意$a \in A$, $\underline{M}_a \neq \emptyset$.

设$a \in A$, 若$e \in \underline{M}_a$, 则称$\{a, e\}$是A的一个正则对. 下面是正则对的性质.

命题 7.1.8 设$a \in A$, $\{a, e\}$和$\{a, e'\}$都是正则对,则有:

(1) $ee' = e', e'e = e$.

(2) $e\mathscr{R}e'$.

证明 因为$ea = a = 1 \cdot a$, 所以由正则对$\{a, e'\}$的性质可知有$ee' = e'$.同理可证$e'e = e$. 由(1)即可得到(2). □

S-系A称为是强忠实的,如果对任意$s, t \in S$, 任意$a \in A, sa = ta \Rightarrow s = t$. 例如,若$S$是右可消幺半群, 则${}_SS$是强忠实$S$-系.事实上有: S是右可消幺半群当且仅当存在强忠实左S-系. 这是因为: 设A是强忠实S-系, $s, t, c \in S$满足$sc = tc$. 任取$a \in A$,则有$sca = tca$. 由A的强忠实性即得$s = t$, 即S是右可消的.

可以用条件(P)及相对平坦性给出强忠实系的特征刻画，见§7.5.

强忠实系与正则系的关系是

命题 7.1.9 强忠实系是正则系.

证明 设A是强忠实S-系, $a \in A$,则$\{a, 1\}$是A的正则对. □

命题7.1.9的逆不成立. 例如,令S是von Neumann正则幺半群但不是右可消的, 则${}_SS$是正则系但不是强忠实系.

例5.2.5和例5.2.7说明条件$|E(S)| = 1$不能保证所有平坦S-系满足条件(P). 然而利用正则系的概念有命题7.1.10, 该命题选自文献[172].

命题 7.1.10 设存在正则右S-系, 则以下几条是等价的:

(1) 所有平坦左S-系满足条件(P);

(2) 对S的任意真左理想J, 存在$j \in J - jJ$;

(3) $|E(S)| = 1$.

证明 (3)⇒(1)设A是正则右S-系, $a \in A, s, t \in S$满足$as = at$. 由A的正则性可知存在$e \in E(S)$,使得$\{a, e\}$是A的正则对. 所以$es = et$. 由条件$|E(S)| = 1$即可知$e = 1$. 所以$s = t$. 这说明A是强忠实右S-系, 所以S是左可消幺半群. 因此由注5.13.11知任意平坦左S-系满足条件(P).

其他结论由命题5.2.1、命题5.2.2和定理5.2.3即得. □

定理7.1.10也说明存在无正则左S-系的幺半群S.

例 7.1.11 令S为例5.2.7中构造的幺半群, 则$|E(S)| = 1$, 但存在不满足条件(P)的平坦右S-系, 所以由定理7.1.10即知不存在正则左S-系.

下面是正则系的一个简单性质.

命题 7.1.12 正则S-系一定满足条件(E).

证明　由命题7.1.2即得. □

命题7.1.12的逆不成立, 例如,取幺半群S, 使得正则S -系不存在, 则S不是群, 从而有真左理想J. 由命题5.2.1知$A(J)$满足条件(E), 但$A(J)$不是正则系.

正则系已有各种形式的推广,请参看文献[182]和文献[178].

§7.2　正则系的平坦性

本节主要考虑所有正则系是平坦系的幺半群,以及其他相关的问题.

例7.1.11说明对于某些幺半群S, 不存在正则左S -系. 显然在本节中只考虑存在正则系的幺半群.

命题 7.2.1　设存在正则S -系, 则S中有一个最大的正则左理想.

证明　设A是正则S -系, $a \in A$, 则由命题7.1.2知有S -同构$Sa \to Se, e \in E(S)$. 由命题7.1.6知Sa是正则S -系, 所以Se也是正则S -系. 这说明S中有正则左理想.

令T为S的所有正则左理想的并, 则由命题7.1.6知T也是正则的. 显然T还是最大的正则左理想. □

以下总是以$T(S)$表示S的最大正则左理想.下面的定理7.2.2选自文献[173].

定理 7.2.2　对于幺半群S, 以下几条等价:

(1) 所有正则S -系是平坦的;

(2) 所有正则S -系是弱平坦的;

(3) 所有正则S -系是主弱平坦的;

(4) 对任意$s \in S$,任意$e^2 = e \in T(S)$, se是S的von Neumann正则元.

证明　(1)⇒(2)⇒(3)显然.

(3)⇒(4) 设$s \in S, e^2 = e \in T(S)$. 如果$Sse = Se$,则存在$t \in S$,使得$tse = e$,所以$se = setse$,即$se$ 是正则元.下设$Sse \neq Se$.类似于$A(I)$的定义构造S -系M如下:

$$
\begin{aligned}
M = &\{(te, x) | te \in Se - Sse\} \cup \{(te, y) | te \in Se - Sse\} \\
&\cup \{(te, z) | \ te \in Sse\},
\end{aligned}
$$

这里x, y, z是三个符号. 规定S在M上的左作用为:

$$
r(te, w) = \begin{cases} (rte, w), & rte \in Se - Sse, \\ (rte, z), & rte \in Sse, \end{cases} \qquad w \in \{x, y\},
$$

$$
r(te, z) = (rte, z).
$$

容易验证M按照上述定义构成一个S -系. 显然有S -系同构$S(e,x)\simeq Se\simeq S(e,y)$. 由于$Se\leqslant T(S)$, 所以由命题7.1.6知$Se$是正则系, 从而$S(e,x),S(e,y)$也是正则系. 再由命题7.1.6知$M=S(e,x)\cup S(e,y)$也是正则系.从而由条件知$M$是主弱平坦的.

因为$se(e,x)=(se,z)=se(e,y)$,所以由M的主弱平坦性知在$seS\otimes M$中有$se\otimes(e,x)=se\otimes(e,y)$,因此存在$s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n\in S,a_1,\cdots,a_n\in M,u_2,\cdots,u_n\in seS$, 使得:

$$\begin{aligned}
& & (e,x)&=s_1a_1,\\
ses_1&=u_2t_1, & t_1a_1&=s_2a_2,\\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots\\
u_ns_n&=set_n, & t_na_n&=(e,y).
\end{aligned}$$

设$a_i=(p_i,w_i)$, 其中$p_i\in S,w_i\in\{x,y,z\}$. 由上述等式组可知存在某个i, 使得$w_i=z$, 因此$t_ip_i\in Sse$. 所以有: $se=se(s_1p_1)=(ses_1)p_1=u_2t_1p_1=u_2s_2p_2=\cdots=u_is_ip_i=u_{i+1}t_ip_i\in u_{i+1}Sse$. 又因为$u_{i+1}\in seS$, 所以$se\in seSse$, 即$se$是正则元.

(4)⇒(1) 设B是正则S-系, A是任意右S-系, $a,a'\in A$, $b,b'\in B$, 在$A\otimes B$中有$a\otimes b=a'\otimes b'$, 所以存在$a_1,\cdots,a_n\in A,b_2,\cdots,b_n\in B$, $s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n\in S$, 使得

$$\begin{aligned}
a&=a_1s_1,\\
a_1t_1&=a_2s_2, & s_1b&=t_1b_2,\\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots\\
a_nt_n&=a', & s_nb_n&=t_nb'.
\end{aligned}$$

记$b_1=b,b_{n+1}=b'$. 因为$b_1,\cdots,b_{n+1}$是B中的正则元, 所以由命题7.1.2知存在$e_1,\cdots,e_{n+1}\in E(S)$, 使得$\{b_1,e_1\},\{b_2,e_2\},\cdots,\{b_{n+1},e_{n+1}\}$是$B$的正则对. 因此有如下的等式组:

$$\begin{aligned}
ae_1&=a_1s_1e_1,\\
a_1t_1e_2&=a_2s_2e_2, & s_1e_1b&=t_1e_2b_2,\\
a_2t_2e_3&=a_3s_3e_3, & s_2e_2b_2&=t_2e_3b_3,\\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots\\
a_nt_ne_{n+1}&=a'e_{n+1}, & s_ne_nb_n&=t_ne_{n+1}b'.
\end{aligned}$$

下面对n用数学归纳法证明在$(aS \cup a'S) \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$.

设$n = 1$, 则有

$$
\begin{aligned}
&ae_1 = a_1 s_1 e_1, \\
&a_1 t_1 e_2 = a' e_2, \qquad s_1 e_1 b = t_1 e_2 b'.
\end{aligned}
$$

由命题7.2.1的证明知Se_1是正则左理想, 所以$e_1 \in T(S)$. 由条件可知$s_1 e_1$是正则元, 故存在$u \in S$, 使得$s_1 e_1 = s_1 e_1 u s_1 e_1$. 所以,

$$t_1 b' = s_1 b = s_1 e_1 b = s_1 e_1 u s_1 e_1 b = s_1 e_1 u s_1 b = s_1 e_1 u t_1 b'.$$

因为$\{b', e_2\}$是正则对, 所以有$t_1 e_2 = s_1 e_1 u t_1 e_2$. 因此在$(aS \cup a'S) \otimes B$中有:

$$
\begin{aligned}
a \otimes b &= a \otimes e_1 b = ae_1 \otimes b = a_1 s_1 e_1 \otimes b \\
&= a_1 s_1 e_1 u s_1 e_1 \otimes b = a_1 s_1 e_1 u \otimes s_1 e_1 b \\
&= a_1 s_1 e_1 u \otimes t_1 e_2 b' = a_1 s_1 e_1 u t_1 e_2 \otimes b' \\
&= a_1 t_1 e_2 \otimes b' = a' e_2 \otimes b' = a' \otimes e_2 b' \\
&= a' \otimes b'.
\end{aligned}
$$

设$n \geqslant 2$. 因为$Se_1 \simeq Sb_1$是正则系, 所以$e_1 \in T(S)$. 因此存在$s_1' \in S$, 使得$s_1 e_1 = s_1 e_1 s_1' s_1 e_1$. 从$s_1 b = t_1 b_2$可得

$$t_1 b_2 = s_1 b = s_1 e_1 b = s_1 e_1 s_1' s_1 e_1 b = s_1 e_1 s_1' t_1 b_2.$$

由于$\{b_2, e_2\}$是正则对, 所以有$t_1 e_2 = s_1 e_1 s_1' t_1 e_2$. 由归纳假定可知在$(a_1 t_1 e_2 S \cup a' e_{n+1} S) \otimes B$中有$a_1 t_1 e_2 \otimes b_2 = a' e_{n+1} b'$(利用框线内的等式组). 因为

$$a_1 t_1 e_2 = a_1 s_1 e_1 s_1' t_1 e_2 = a e_1 s_1' t_1 e_2 \in aS,$$

所以在$(aS \cup a'S) \otimes B$中有

$$a' \otimes b' = a' \otimes e_{n+1} b' = a' e_{n+1} \otimes b' = a_1 t_1 e_2 \otimes b_2.$$

对于前两行的等式组,利用归纳假定可知在$(aS \cup a_2 s_2 e_2 S) \otimes B$中有$ae_1 \otimes b = a_2 s_2 e_2 \otimes b_2$. 由于$a_2 s_2 e_2 = a_1 t_1 e_2 \in aS$, 所以在$(aS \cup a'S)$中有$a \otimes b = a \otimes e_1 b = ae_1 \otimes b = a_2 s_2 e_2 \otimes b_2$.

结合前面的结果即知在$(aS \cup a'S) \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$. 因此$B$是平坦的. □

推论 7.2.3 对于幺半群S,以下两条等价:

(1) S是正则幺半群;

(2) S是左PP幺半群, 并且所有正则S -系是平坦(弱平坦、主弱平坦)的.

证明 S是左PP幺半群当且仅当$_SS$是正则S -系,当且仅当$T(S) = S$. 所以由定理7.2.2即得本推论. □

定理 7.2.4 对于幺半群S, 以下两条等价:

(1) 所有正则S -系是挠自由的;

(2) 对于S的任意左可消元r, 任意$e^2 = e \in T(S)$, 有$re\mathscr{L}e$.

证明 (1)⇒(2)设r是左可消元, $e^2 = e \in T(S)$. 假定$Sre \neq Se$, 则类似于定理7.2.2的证明构造S -系M. 因为M是正则系, 所以由条件便知M是挠自由的. 显然有

$$r(e,x) = (re,z) = r(e,y).$$

所以由M的挠自由性即知$(e,x) = (e,y)$. 矛盾. 这说明$Sre = Se$, 即$re\mathscr{L}e$.

(2)⇒(1)设A是正则S -系, $a,b \in A, r \in S$是左可消元, 满足$ra = rb$. 因为A是正则的, 所以存在$e,f \in E(S)$, 使得$\{a,e\},\{b,f\}$是正则对. 因此$rea = rfb$. 由于$e \in T(S)$, 所以$re\mathscr{L}e$, 故存在$t \in S$, 使得$tre = e$. 因此

$$a = ea = trea = trfb.$$

所以,

$$rb = ra = r(trfb) = rtrfb.$$

由正则对$\{b,f\}$的性质可知有

$$rf = rtrf.$$

所以$f = trf$(r是左可消元). 故

$$a = (trf)b = fb = b.$$

即A是挠自由的. □

定理 7.2.5 对于幺半群S,以下几条等价:

(1) 所有正则S -系是投射的;

(2) 所有正则S -系是强平坦的;

(3) 所有正则S -系满足条件(P);

(4) 对任意$e^2 = e \in T(S)$, Se是S的极小左理想.

证明 (1)⇒(2)⇒(3)显然.

(3)⇒(4)设$e^2 = e \in T(S)$, 则Se是S的左理想. 设I是S的左理想并且$I \leqslant Se, I \neq Se$. 类似于定理7.2.2的证明构造正则$S$ -系M, 由条件知M满足条件(P).

由命题4.2.8知M是循环子系的不交并. 但这是不可能的, 因为$S(e,x)\cap S(e,y)=\{(se,z)|se\in I\}$. 所以$Se$是极小左理想.

(4)⇒(1) 设A是正则S -系. 对任意$a\in A$,有S -系同构$Sa\simeq Se$, 所以Se是正则的, 从而$e^2=e\in T(S)$. 由条件即知Se是极小左理想, 因此Sa是单S -系, 即Sa中再没有真子系. 容易证明A是若干个单子系的余直积, 而每个单子系是投射的, 所以A是投射的. □

定理 7.2.6 对于幺半群S, 以下几条等价:

(1) 所有正则S -系是自由的;

(2) S是群.

证明 (1)⇒(2) 设$e\in T(S)$, 则由定理7.2.5知Se是S的极小左理想. 又Se也是正则的, 所以$Se\simeq S$. 这说明S没有真的左理想, 所以S是群.

(2)⇒(1) 设S是群, A是正则S -系, 则A是循环子系$A_i(i\in I)$的余直积. 由命题7.1.6知每个A_i是正则系, 所以由推论7.1.4知A_i是投射的, 因此$A_i\simeq S$. 所以A是自由系. □

定理 7.2.7 对于幺半群S, 以下几条等价:

(1) 所有正则系是可除的;

(2) 对于任意$e^2=e\in T(S)$, Se是可除的.

证明 (1)⇒(2)显然, 因为Se是正则S -系.

(2)⇒(1)设A是正则S -系, $a\in A$, 则存在$e^2=e\in S$, 使得$Sa\simeq Se$. 显然$e\in T(S)$, 所以Se是可除的, 即对任意右可消元d, 有$dSe=Se$. 因此$dSa=Sa$. 所以,

$$dA=d(\bigcup_{a\in A}Sa)=\bigcup_{a\in A}dSa=\bigcup_{a\in A}Sa=A,$$

即A是可除系. □

定理 7.2.8 对于幺半群S, 以下几条等价:

(1) 所有正则S -系是主弱内射的;

(2) 任意$s\in T(S)$, s是von Neumann正则元, 并且对任意$p\in S-T(S)$, 若p是e-可消的, $e^2=e\in T(S)$, 则$e\in pS$.

证明 (1)⇒(2)设$s\in T(S)$, 则$Ss\leqslant T(S)$, 所以Ss是正则S -系. 由条件即知Ss是主弱内射的, 所以存在S -同态$g:S\to Ss$, 使得$g|_{Ss}=1$. 设$g(1)=ts$. 则$sts=sg(1)=g(s)=s$, 所以s是正则元.

设$p\in S-T(S)$, 并且存在$e^2=e\in T(S)$, 使得p是e-可消的. 作映射$f:Sp\to Se$为:

$$f(sp)=se,\quad \forall\ s\in S.$$

因为p是e-可消的，所以f是映射．显然f还是S -同态．因为Se是正则的，所以是主弱内射的．因此存在S -同态$g : S \to Se$，使得$g|_{Sp} = f$．故有

$$e = f(p) = g(p) = pg(1) \in pS.$$

(2)⇒(1)由命题3.8.15，只需证明任意正则S -系是余平坦系．设A是正则系，$a \in A, s \in S$，并且$a \notin sA$．要证明存在$h, k \in S$，使得$hs = ks$，但$ha \neq ka$．

设$s \in T(S)$,则存在$s' \in S$，使得$s = ss's$．令$h = 1, k = ss'$，则hs $= ks$，但$ha \neq ka$，否则$a = ha = ka = ss'a \in sA$,矛盾．

设$s \in S - T(S)$．假定对任意$h, k \in S$，若$hs = ks$，则必有$ha = ka$．因为a是正则元，所以存在$e^2 = e \in T(S)$，使得$\{a, e\}$是A的正则对．设$h, k \in S$，使得$hs = ks$，则由假定知有$ha = ka$，所以$he = ke$．这说明s是e-可消的．由条件可知$e \in sS$，所以存在$t \in S$，使得$e = st$，因此$a = ea = sta \in sA$．矛盾．因此存在$h, k \in S$，使得$hs = ks$，但$ha \neq ka$．即A是余平坦的． □

定理 7.2.9 对于幺半群S,以下几条等价:

(1) 所有正则S -系是余自由的;

(2) 所有S -系是余自由的;

(3) $S = \{1\}$.

证明 (3)⇒(2)⇒(1)显然.

(1)⇒(3)设$e^2 = e \in T(S)$，则Se是正则S -系，所以是余自由的，即存在集合X,使得$Se \simeq X^S$．如果$|X| \geqslant 2$，则$|X^S| > |S| \geqslant |Se|$，矛盾．所以$|X| = 1$．因此$|Se| = |X^S| = 1$，这说明$e$是$S$的右零元．考虑$S$ -系$A = Se \dot{\cup} Se$，则A是正则系，并且$|A| = 2$．由条件知A是余自由的，所以$A \simeq Y^S$．如果$|S| \geqslant 2$，则当$|Y| = 1$时，$|Y^S| = 1$，当$|Y| \geqslant 2$时，$|Y^S| > 2$，所以和$|A| = 1$矛盾．因此必有$|S| = 1$，即$S = \{1\}$． □

例 7.2.10 设P是只有一个幂等元的非右可消幺半群，T是正则半群，$S = P \dot{\cup} T$，规定S上的乘法运算为

$$pt = tp = t, \quad \forall\, p \in P, \quad \forall\, t \in T,$$

其他元素相乘时按照原来的定义,则S是幺半群，T是S的左理想．下面证明$T = T(S)$．

显然有$T \subseteq T(S)$．设$a \in P \cap T(S)$，则存在幂等元e，使得$\{a, e\}$是正则对．如果$e \in T$，则$a = ea = e$，矛盾．所以$e \in P$，故$e = 1$．设$u \in P$是非右可消元，则$ua \in T(S)$．因为$ua \in P$，所以T中的任意幂等元都不能和ua构成正则对．若$\{ua, 1\}$是正则对，则ua是P的右可消元．矛盾．这说明$P \cap T(S) = \emptyset$，所以$T = T(S)$．

设$s \in S, e^2 = e \in T$. 若$s \in P$, 则$se = e$是正则元. 若$s \in T$, 则$se \in T$, 所以se仍是von Neumann正则元. 因此S满足定理7.2.2的条件(4), 所以所有正则S -系是平坦(弱平坦,主弱平坦)的. 显然可以使S不是von Neumann正则幺半群, 因此S不是左绝对平坦幺半群.

如果取T为完全单半群, 则可得到幺半群S, 它满足定理7.2.5的条件(4), 所以所有正则S -系是投射的.

设$p \in P, e^2 = e \in T(S)$, 并且$p$是$e$-可消的, 则$e = pe \in pS$, 所以$S$满足定理7.2.8的条件(2), 因此所有正则$S$ -系是主弱内射的.

设A是S -系, $s, t \in S$.如果

$$sa = ta(\forall\ a \in A) \Rightarrow s = t,$$

则称A是忠实S -系.

显然强忠实S -系是忠实的.

定理 7.2.11 对于幺半群S, 以下几条等价:

(1) 所有正则S -系是忠实的;

(2) 对任意$e^2 = e \in T(S)$, 左理想Se是忠实的.

证明 (1)⇒(2)显然.

(2)⇒(1)设A是正则S -系, $u, v \in S$, 使得对任意$x \in A$, 有$ux = vx$. 取$a \in A$, 则存在$e^2 = e \in T(S)$, 使得$\{a, e\}$是正则对. 对于任意$s \in S$, 有$usa = vsa$, 所以$use = vse$. 利用Se的忠实性即得$u = v$. □

如何刻画所有正则S -系是内射系的幺半群, 以及所有正则系是弱内射系的幺半群, 至今还是没有解决的问题.

§7.3 平坦系的正则性

本节考虑所有平坦S -系是正则系的幺半群, 以及其他相关的问题. 其主要结果选自文献[176]和文献[246].

首先证明

引理 7.3.1 设$S = N^1$, 其中N是左零半群, A是弱平坦左S -系. 如果$a \in A, s, t \in N$, 使得$sa = ta$, 则$s = t$.

证明 因为$sa = ta$, 所以在$S \otimes A$中有$s \otimes a = t \otimes a$. 由于$A$是弱平坦的, 所以在$(sS \cup tS) \otimes A$中有$s \otimes a = t \otimes a$. 因此存在$u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n \in S, s_1, \cdots, s_n \in$

$sS \cup tS, a_2, \cdots, a_n \in A$, 使得:

$$
\begin{aligned}
&s = s_1u_1, \\
&s_1v_1 = s_2u_2, \qquad u_1a = v_1a_2, \\
&s_2v_2 = s_3u_3, \qquad u_2a_2 = v_2a_3, \\
&\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots \\
&s_nv_n = t, \qquad u_na_n = v_na.
\end{aligned}
$$

记$s_0 = s, s_{n+1} = t, s_i = w_it_i, t_i \in S, w_i \in \{s,t\}, i = 1, \cdots, n$. 显然存在$i$, 使得$s_i = st_i, s_{i+1} = tt_{i+1}$. 所以有$s = st_iv_i = s_iv_i = s_{i+1}u_{i+1} = tt_{i+1}u_{i+1} = t$. □

定理 7.3.2 对于幺半群S,以下几条等价:

(1) 所有平坦S -系是正则的;

(2) 所有弱平坦S -系是正则的;

(3) 任意平坦S -系的循环子系是强平坦的;

(4) 任意弱平坦S -系的循环子系是强平坦的;

(5) $S = N^1$, 其中$N = \emptyset$, 或者N是左零半群.

证明 因为S -系A是正则的当且仅当其循环子系是投射的, 所以(1)⇒(3)、(2)⇒(4)是显然的. 只需证明(5)⇒(2)和(3)⇒(5).

(5)⇒(2)设$S = \{1\}$, 则结论自然成立. 设$S = N^1$, 其中N是左零半群. 设A是弱平坦S -系, $a \in A$. 要证明Sa是投射S -系.

设对任意$s \in N$都有$sa \neq a$. 规定映射$f: Sa \to S$如下:

$$f(ta) = t, \quad \forall\ t \in S.$$

设$ta = t'a, t, t' \in S$. 如果$t, t' \in N$, 则由引理7.3.1知$t = t'$. 如果$t \in N, t' = 1$, 则$ta = a$, 矛盾. 如果$t' \in N, t = 1$, 也可得到矛盾. 因此f是有定义的. 显然f还是S -同构, 所以$Sa \simeq S$是投射的.

设存在$s \in N$, 使得$sa = a$. 作映射$f: Sa \to Ss$如下:

$$
\begin{aligned}
&f(a) = s, \\
&f(ta) = t, \qquad t \in N.
\end{aligned}
$$

利用引理7.3.1容易验证f是有定义的. 显然f还是S -同构. 所以$Sa \simeq Ss$是投射的.

(3)⇒(5)设任意平坦S -系的循环子系是强平坦的, 则任意平坦的循环S -系是强平坦的. 由定理5.6.8知S是左谐零的, 即对任意$1 \neq x \in S$, 存在n,使

得x^n是S的左零元. 因为S是平坦系, 所以S的任意主左理想是强平坦的, 即S是左PSF幺半群. 由定理4.4.13知S中的任意元都是右半可消元.

设$x \neq 1, x \in S$. 假定n是使得x^n为左零元的最小正整数. 如果$n = 1$, 则x即为左零元. 设$n > 1$. 因为

$$x^n x = x^n = x^{n-1}x,$$

而x是右半可消元, 所以存在$u \in S$,使得

$$x^n u = x^{n-1}u, \quad ux = x.$$

如果$u = 1$, 则$x^n = x^{n-1}$, 和n的最小性矛盾. 所以$u \neq 1$. 因为S是左谐零的, 所以存在m使得u^m是S的左零元. 因为

$$x = ux = u^2x = \cdots = u^m x = u^m,$$

所以x是S的左零元. 这和$n > 1$矛盾. 所以x是S的左零元, 即$S = N^1$, 其中$N = \emptyset$, 或N是左零半群. □

由定理7.3.2及其证明过程可以得到

推论 7.3.3 对于幺半群S,以下几条等价:

(1) 所有循环平坦S -系是正则的;

(2) 所有循环弱平坦S -系是正则的;

(3) 任意循环平坦S -系的循环子系是强平坦的;

(4) 任意循环弱平坦S -系的循环子系是强平坦的;

(5) $S = N^1$, 其中$N = \emptyset$, 或N是左零半群.

推论 7.3.4 对于幺半群S, 以下两条等价:

(1) S是右PP幺半群, 并且所有循环平坦左S -系是强平坦的;

(2) $S = N^1$,其中$N = \emptyset$或N是左零半群.

证明 (2)⇒(1)由推论7.3.3即得.

(1)⇒(2)由定理5.6.10知任意$x \in S$, x是左零元或左可消元. 再由定理5.1.5知S中的左可消元只有1. 所以$S = N^1$, 其中$N = \emptyset$, 或N是左零半群. □

推论 7.3.5 设S是左PSF幺半群, 则以下几条是等价的:

(1) 所有平坦S -系满足条件(E);

(2) 所有弱平坦S -系满足条件(E);

(3) $S = N^1$, 其中$N = \emptyset$, 或N是左零半群.

证明 (2)⇒(1)显然.

(1)⇒(3)设所有平坦S -系满足条件(E), 则所有循环的平坦S -系是强平坦的. 所以类似于定理7.3.2中(3)⇒(5)的证明即可得结论.

(3)⇒(2)由定理7.3.2及命题7.1.12即得. □

推论7.3.5给出了§ 5.11中一个未解决问题的部分答案.

由定理7.2.2知, 若所有正则系是平坦的, 则对任意$s \in S$, 任意$e^2 = e \in T(S)$, se是S的正则元. 所以由定理7.3.2知, 如果所有平坦系是正则的, 则所有正则系是平坦的. 反过来的结论是不成立的, 即当所有正则S -系是平坦系时, 所有平坦系未必是正则的. 例如,令S为例7.2.10中的幺半群, 则由例7.2.10知所有正则S -系是平坦的, 但存在非正则的平坦系.

推论 7.3.6 设S的任意两个主右理想的交非空, 则所有平坦S -系是正则的当且仅当$S = \{1\}$或者$S = \{1, 0\}$.

证明 由定理7.3.2立得. □

定理 7.3.7 对于幺半群S,以下几条等价:

(1) 所有主弱平坦S -系是正则的;

(2) 所有挠自由S -系是正则的;

(3) 所有余自由S -系是正则的;

(4) 所有内射S -系是正则的;

(5) 所有弱内射S -系是正则的;

(6) 所有主弱内射S -系是正则的;

(7) 所有可除S -系是正则的;

(8) 所有忠实S -系是正则的;

(9) 所有S -系是正则的;

(10) $S = \{1\}$或$S = \{1,0\}$.

证明 (1)⇒(10)设所有主弱平坦S -系是正则的, 则所有平坦S -系是正则的. 由定理7.3.2即知$S = N^1$, 其中$N = \emptyset$或N是左零半群. 设$S \neq \{1\}$, 则$N \neq \emptyset$. 显然N是S的真左理想. 因为N中的元皆为幂等元, 所以由命题5.10.1知S/λ_N是主弱平坦的, 因此由条件知S/λ_N是正则的, 从而S/λ_N是投射的, 所以满足条件(P). 设$x, y \in N$, 则$x\lambda_N y$. 所以由命题5.1.1知存在$u, v \in S$, 使得$xu = yv$, 并且$u\lambda_N 1\lambda_N v$. 由于$1 \notin N$, 所以$u = 1 = v$, 故$x = y$. 这说明$|N| = 1$. 所以$S = \{1, 0\}$.

(9)⇒(2)⇒(1)及(9)⇒(8),(9)⇒(7)⇒(6)⇒(5)⇒(4)⇒(3)都是显然的.

(8)⇒(9) 设A是任意S -系, 令$B = A \dot{\cup} S$, 则B是忠实的, 所以由条件知B是正则系, 从而由命题7.1.6知A是正则系. 所以所有S -系是正则的.

(3)⇒(9) 设A是任意S -系, 由推论3.1.4知A可以嵌入到S -系A^S中, 而A^S是余自由的,从而是正则的, 所以A是正则系. 这即证明了所有S -系是正则的.

(10)⇒(9)设$S = \{1\}$, 则显然所有S -系是正则的, 下设$S = \{1, 0\}$.

设A是任意S -系, $a \in A$, 则Sa中最多只有两个元素: $a, 0a$. 设$a = 0a$, 则$Sa \simeq S0$,所以Sa是投射的. 设$a \neq 0a$, 则容易证明$Sa \simeq S1$, 因此Sa仍是投射的. 所以A是正则系. □

定理 7.3.8 对于幺半群S,以下几条等价:

(1) 所有自由S -系是正则的;

(2) 所有投射S -系是正则的;

(3) S是左PP幺半群.

证明 (2)⇒(1)是显然的. 因为${}_SS$是自由S -系, 所以(1)⇒(3)也是显然的.

(3)⇒(2)设S是左PP幺半群, A是投射S -系, 则$A = \dot{\cup} Se_i, e_i^2 = e_i \in E(S)$. 所以由命题7.1.6即知$A$是正则的. □

定理 7.3.9 对于幺半群S,以下几条等价:

(1) 所有强平坦S -系是正则的;

(2) S是左PP幺半群并且满足条件

(FP_2) 设M是$E(S)$的子集合, 如果对于任意$e_1, \cdots, e_n, f_1, \cdots, f_m \in M$, 存在$f \in M$, 满足$e_1 \cdots e_n f = f_1 \cdots f_m f$, 那么$S$的子半群$\langle M \rangle$中含有右零元.

证明 (1)⇒(2)由定理7.3.8即知S是左PP幺半群. 因为所有强平坦S -系是正则的, 所以所有循环的强平坦S -系是投射的, 因此由定理5.9.1知S满足条件(FP_2).

(2)⇒(1)设A是强平坦S -系, $a \in A$. 要证明a是A的正则元即可. 令

$$\mathrm{ann}(a) = \{(s,t) | s,t \in S, sa = ta\}.$$

考虑两种情形:

(i)$\mathrm{ann}(a) = 1_S$. 此时$Sa \simeq S$, 所以$\{a, 1\}$是A的正则对.

(ii) $\mathrm{ann}(a) \neq 1_S$. 此时存在$s \neq t$, 但$sa = ta$. 因为A是强平坦系, 所以A满足条件(E), 从而存在$a' \in A, u \in S$, 使得:

$$su = tu, \quad a = ua'.$$

又因为S是左PP幺半群, 所以存在$e \in E(S)$, 使得$se = te, u = eu$. 因此$ea = eua' = ua' = a$.令

$$M = \{e \in E(S) | ea = a\},$$

则$M \neq \emptyset$. 设$e_1, \cdots, e_n, f_1, \cdots, f_m \in M$, 则显然有

$$e_1 \cdots e_n a = a = f_1 \cdots f_m a,$$

所以$(e_1 \cdots e_n, f_1 \cdots f_m) \in \mathrm{ann}(a)$. 类似于前面的证明可知存在$f^2 = f \in S$, 使得$e_1 \cdots e_n f = f_1 \cdots f_m f$并且$fa = a$. 所以$f \in M$. 因此由条件($FP_2$)知$\langle M \rangle$中

含有右零元, 设其为θ. 显然$\theta = f_1 \cdots f_k$, 其中$f_1, \cdots, f_k \in M$. 所以$\theta a = a$. 设$sa = ta$, 则由前面的证明知存在$e^2 = e \in S$, 使得$se = te$, 并且$ea = a$, 所以$e \in M$. 因此$s\theta = s(e\theta) = se\theta = te\theta = t(e\theta) = t\theta$. 这说明$\{a, \theta\}$是$A$的正则对.

因此a是A的正则元, 从而A是正则S -系. □

推论 7.3.10 对于幺半群S, 以下几条等价:

(1) 所有满足条件(E)的S -系是正则的;

(2) 所有均衡平坦S -系是正则的;

(3) S是左PP幺半群并且满足条件(FP_2).

证明 由定理7.3.9的证明过程即得. □

引理 7.3.11 设S是左PSF幺半群, 则每一个满足条件(E)的左S -系的循环子系是强平坦的.

证明 设A是满足条件(E)的左S -系. 对任意的$a \in A$, 定义左S -同态$\varphi: S \mapsto Sa$为$\varphi(s) = sa$. 显然循环子系Sa同构于循环S -系S/ρ, 其中$\rho = \ker\varphi = \{(s,t) \in S \times S | sa = ta\}$. 对任意的$u, v \in S$, 若$u\rho v$, 则$ua = va$. 由于$A$满足条件(E), 存在$a' \in A$, $t \in S$, 使得$a = ta'$, $ut = vt$. 因为S是左PSF幺半群, 对$ut = vt$, 存在$s \in S$, 使得$t = st$, $us = vs$, 因此$a = ta' = sta' = sa$, 即$s\rho 1$, 故S/ρ是强平坦的. 说明循环子系Sa也是强平坦的. □

称幺半群S是左半完全的, 如果所有强平坦的循环左S -系是投射的.

定理 7.3.12 对于幺半群S,以下几条等价:

(1) 所有强平坦S -系是正则的;

(2) 所有有限生成的强平坦S -系是正则的;

(3) 所有循环的强平坦S -系是正则的;

(4) 所有满足条件(E)的S -系是正则的;

(5) 所有满足条件(E)的有限生成S -系是正则的;

(6) 所有满足条件(E)的循环S -系是正则的;

(7) S是左半完全和左PSF幺半群.

证明 $(4) \Rightarrow (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$以及$(4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (6) \Rightarrow (3)$是显然的.

$(3) \Rightarrow (7)$ 由(3)显然S是左半完全的幺半群.假设所有循环的强平坦左S -系是正则的, 则所有循环的强平坦左S -系的循环子系是投射的,显然S是左PP幺半群, 必是左PSF幺半群.

$(7) \Rightarrow (4)$ 设A是满足条件(E)的左S -系. 对任意的$a \in A$,因为S是左PSF幺半群,由引理7.3.11知循环子系Sa是强平坦的. 因为S是左半完全的, 故Sa是投射的, 即A是正则的. □

下述推论是显然的:

推论 7.3.13 对于幺半群S,以下几条等价:

(1) 所有强平坦S -系是正则的;

(2) 所有有限生成的强平坦S -系是正则的;

(3) 所有循环的强平坦S -系是正则的;

(4) 所有满足条件(E)的S -系是正则的;

(5) 所有满足条件(E)的有限生成S -系是正则的;

(6) 所有满足条件(E)的循环S -系是正则的;

(7) S是左半完全和左PP幺半群.

推论 7.3.14 对于幺半群S,以下几条等价:

(1) 所有强平坦S -系是正则的;

(2) 所有有限生成的强平坦S -系是正则的;

(3) 所有循环的强平坦S -系是正则的;

(4) 所有满足条件(E)的S -系是正则的;

(5) 所有满足条件(E)的有限生成S -系是正则的;

(6) 所有满足条件(E)的循环S -系是正则的;

(7) S是左PSF幺半群并且满足条件(FP_1)和条件(FP_2').

§7.4 正则系的圈积

本节介绍圈积的概念,并讨论正则系的圈积, 以及圈积的正则性, 从而给出了一种构造正则系的方法.

设X,Y是两个集合,令$F(X,Y)=\{f:X\to Y\}$. 则$F(X,X)=\mathscr{T}(X)$.

设S,T是幺半群, A是左S -系. 记$W=W(S,T,A)=S\times F(A,T)$,规定其乘法运算为:

$$(s,f)(t,g)=(st,f_tg),\quad \forall\ s,t\in S,\quad \forall\ f,g\in F(A,T),$$

其中映射f_tg的定义为:

$$(f_tg)(a)=f(ta)g(a),\ \ \forall\ a\in A.$$

容易证明W关于上述乘法运算构成一个半群. 若记S和T的单位元分别为e,f, 则容易验证W的元素(e,c_f)是W的单位元, 从而W是幺半群, 这里c_f的定义为:

$$c_f(a)=f,\quad \forall\ \ a\in A.$$

把幺半群W称为由S -系A决定的幺半群S和T的圈积.

设B是左T-系, 令$C = A \times B$, 规定W在C上的左作用为:

$$(s,f)(a,b) = (sa, f(a)b), \quad \forall a \in A, \forall\, b \in B, \forall s \in S, \quad \forall f \in F(A,T).$$

容易验证C是左W-系. 称C为A和B的圈积, 记为$C = {}_S A\mathrm{wr}_T B$或$C = A\mathrm{wr}B$.

例 7.4.1 设F为集合X上的自由右S -系, 即$F = \dot{\bigcup\limits_{x_i \in X}} x_i S$, 其中$x_i S \simeq S$. 记$F$的自同态幺半群为$\mathrm{End}_S F$. 作$\mathscr{T}(X)$和$S$的由$\mathscr{T}(X)$-系$X$决定的圈积$W = W(\mathscr{T}(X), S, X)$,作映射$\Phi : \mathrm{End}_S F \to W$为:

$$\Phi(\varphi) = (s,f), \quad \forall\, \varphi \in \mathrm{End}_S F,$$

这里$s \in \mathscr{T}(X), f \in F(X,S)$,并且满足

$$\Phi(x) = s(x)f(x), \quad \forall\, x \in X.$$

显然φ可由$f(x)$及$s(x)$唯一确定, 所以Φ是单映射. 对于任意$s \in \mathscr{T}(X)$和$f \in F(X,S)$, 可通过等式$\varphi(xt) = s(x)f(x)t$定义F的S -系自同态φ. 所以φ是满的. 设$\varphi, \varphi' \in \mathrm{End}_S F$, $\varphi(x) = s(x)f(x)$, $\varphi'(x) = s'(x)f'(x)$, 则:

$$\begin{aligned}(\varphi\varphi')(x) &= \varphi(\varphi'(x)) = \varphi(s'(x)f'(x)) \\ &= \varphi(s'(x))f'(x) = s(s'(x))f(s'(x))f'(x) \\ &= (ss')(x)f(s'x)f'(x),\end{aligned}$$

所以$\Phi(\varphi\varphi') = (ss', f_{s'}f') = (s,f)(s',f') = \Phi(\varphi)\Phi(\varphi')$. 因此$\Phi : \mathrm{End}\ {}_S F \to W$是半群同构.

记$T = \mathrm{End}_S F$, 令$\alpha : {}_T F \to {}_{\mathscr{T}(X)} X\mathrm{wr}_S S$如下:

$$\alpha(xt) = (x,t), \quad \forall\, x \in X, \forall\, t \in S.$$

显然α是映射. 设$\varphi \in T, \Phi(\varphi) = (s,f)$, 则

$$\begin{aligned}\alpha(\varphi(xt)) &= \alpha(s(x)f(x)t) = (s(x), f(x)t) \\ &= (sx, f(x)t) = (s,f)(x,t) \\ &= \Phi(\varphi)\alpha(xt).\end{aligned}$$

所以若把同构的幺半群$\mathrm{End}_S F$和W看成一致的, 则α就是${}_T F$到${}_{\mathscr{T}(X)} X\mathrm{wr}_S S$的同构.

例 7.4.2 设X, Y是无向无圈并且没有多重边界的图,记$M(X)$为图X的自同态幺半群$\mathrm{End}X$的一个子幺半群, 则顶点集$V(X)$是左$M(X)$-系. 记W为由$V(X)$

决定的$M(X)$和$M(Y)$的圈积, 则图X和图Y的字典积$X[Y]$即为左$M(X)$-系$V(X)$和左$M(Y)$-系$V(Y)$的圈积, 即

$$X[Y] = {}_{M(X)}V(X)\mathrm{wr}_{M(Y)}V(Y).$$

其证明参见文献[146].

下面讨论正则系的圈积及圈积的正则性.先引入如下记号.

设A是正则S -系, $a \in A$, 则存在$e^2 = e \in S$, 使得$\{a, e\}$是A的正则对. 记$A_1^e = \{x \in A | ex = a\}, A_2^e = A - A_1^e$.

引理 7.4.3　设$a \in A, \{a, e\}, \{a, e'\}$是正则对, 则有$A_2^e = \emptyset \Leftrightarrow A_2^{e'} = \emptyset \Leftrightarrow A_1^e = A \Leftrightarrow A_1^{e'} = A$.

证明　如果对任意$a \in A$有$ex = a$, 则$e'x = (ee')x = e(e'x) = a$, 所以$A_1^{e'} = A$ 结论得证. □

以下总是设S, T为幺半群, A是左S -系, B是左T-系, W是由A决定的S和T的圈积, $C = {}_SA\mathrm{wr}_TB$. 则C是左W-系.

引理 7.4.4　设$\{(a, b), (e, h)\}$是$A\mathrm{wr}B$的正则对, 则$\{a, e\}, \{b, h(a)\}$分别是A和B的正则对.

证明　因为$(e, h)^2 = (e, h), (e, h)(a, b) = (a, b)$, 所以$e^2 = e, ea = a$, 并且对任意$x \in A$, 有$h(ex)h(x) = h(x)$. 因此, $h(a) = h(ea)h(a) = h(a)h(a)$. 从$(e, h)(a, b) = (a, b)$还可得到$b = h(a)b$.

设$p, q \in S$, 使得$pa = qa$. 对任意$t \in T$, 定义映射$c_t : A \to T$如下:

$$c_t(x) = t, \quad \forall\, x \in A,$$

则有

$$(p, c_1)(a, b) = (pa, b) = (qa, b) = (q, c_1)(a, b).$$

因为$\{(a, b), (e, h)\}$是正则对, 所以有

$$(p, c_1)(e, h) = (q, c_1)(e, h),$$

从而$pe = qe$.这说明$\{a, e\}$是A的正则对.

设$u, v \in T$, 使得$ub = vb$. 要证明$uh(a) = vh(a)$. 因为:

$$(1, c_u)(a, b) = (a, ub) = (a, vb) = (1, c_v)(a, b),$$

所以

$$(1, c_u)(e, h) = (1, c_v)(e, h),$$

从而有

$$uh(x) = vh(x), \quad \forall\, x \in A.$$

所以$uh(a) = vh(a)$.这说明$\{b, h(a)\}$是B的正则对. □

引理 7.4.5 设$(a, b), (e, h)$是$A\mathrm{wr}B$的正则对, 并且$A_2^e \neq \emptyset$. 则存在$x_0 \in A$, 使得$ex_0 \neq a$, 并且$h(x_0)$是T的右零元.

证明 设$x_0 \in A_2^e$, 则$ex_0 \neq a$. 令$t_0 = h(x_0)$. 对任意$t \in T$, 规定$f : A \to T$,使之满足:

$$f(a) = 1, \quad f(ex_0) = t,$$

则有

$$(1, f)(a, b) = (a, f(a)b) = (a, b) = (e, h)(a, b).$$

所以有

$$(1, f)(e, h) = (e, h)(e, h) = (e, h).$$

因此对任意$x \in A$有

$$f(ex)h(x) = h(x).$$

所以$tt_0 = f(ex_0)h(x_0) = h(x_0) = t_0$. 由$t \in T$的任意性即知$t_0$是$T$的右零元. □

引理 7.4.6 设$a \in {}_SA, b \in {}_TB, e^2 = e \in S, w^2 = w \in T, \{a, e\}, \{b, w\}$是正则对, 并且当$A_2^e \neq \emptyset$时, T中有右零元s_0, 则存在$h \in F(A, T)$, 使得$\{(a, b), (e, h)\}$是正则对, 且$h|_{A_1^e} = c_w|_{A_1^e}, h|_{A_2^e} = c_{s_0}|_{A_2^e}$.

证明 首先, $(e, h)(e, h) = (e, h_eh)$. 对任意$x \in A_1^e, ex = a$, 所以$(h_eh)(x) = h(ex)h(x) = h(a)h(x) = h(a)w = w^2 = w = h(x)$. 当$x \in A_2^e$时, $A_2^e \neq \emptyset$, 所以T中有右零元s_0, 因此$(h_eh)(x) = h(ex)h(x) = h(ex)s_0 = s_0 = h(x)$. 这就证明了$h_eh = h$, 所以$(e, h)(e, h) = (e, h)$. 显然还有

$$(e, h)(a, b) = (ea, h(a)b) = (a, wb) = (a, b).$$

设$p, q \in A, f, g \in F(A, T)$, 使得$(p, f)(a, b) = (q, g)(a, b)$, 则有

$$pa = qa, \quad f(a)b = g(a)b.$$

所以$pe = qe, f(a)w = g(a)w$. 因为对任意$x \in A_1^e$,

$$f(ex)h(x) = f(a)w = g(a)w = g(ex)h(x),$$

对任意$x \in A_2^e$,

$$f(ex)h(x) = f(ex)s_0 = s_0 = g(ex)s_0 = g(ex)h(x),$$

所以有

$$(p, f)(e, h) = (pe, f_e h) = (qe, g_e h) = (q, g)(e, h).$$

因此$\{(a,b),(e,h)\}$即为$A\mathrm{wr}B$的正则对. □

定理 7.4.7 设W是由A决定的幺半群S和T的圈积, $C = A\mathrm{wr}B$是A和B的圈积,则$(a,b) \in C$是正则的当且仅当a, b分别是A和B的正则元, 并且如果存在$x_0 \in A, e \in \underline{M}_a$, 使得$ex_0 \neq a$, 则$T$中含有右零元.

证明 引理7.4.4,引理7.4.5和引理7.4.6即得. □

定理 7.4.8 设W是由A决定的S和T的圈积, 则以下两条等价:

(1) $A\mathrm{wr}B$是正则W-系;

(2) A是正则S -系, B是正则T-系, 并且如果存在$x_0 \in A, e \in \underline{M}_a$, 使得$ex_0 \neq a$, 则$T$中含有右零元.

证明 由定理7.4.7立得. □

推论 7.4.9 设F是集合X上的自由右S -系, $x \in X, s \in S$, 则xs是左$\mathrm{End}_S F$-系T中的正则元当且仅当s是${}_S S$中的正则元. 因此左$\mathrm{End}_S F$-系F是正则的当且仅当S是左PP的.

证明 令$T = \mathrm{End}_S F$. 由例7.4.1知有同构:${}_T F \simeq {}_{\mathscr{T}(X)} X \mathrm{wr}_S S$. 显然$\{x, e\}$是左$\mathscr{T}(X)$-系$X$的正则对当且仅当$e = c_x$, 所以$A_2^e = \emptyset$. 因此由定理7.4.7、定理7.4.8即得本推论. □

例 7.4.10 设S, T都是正则幺半群, 并且T含有右零元. 令$A = {}_S S, B = {}_T T$, 则$A\mathrm{wr}B$是正则的左W-系, 这里$W = S \times F(A,T)$是S和T的圈积. 令$W^0 = W \,\dot\cup\, \{0\}, C^0 = (A\mathrm{wr}B) \,\dot\cup\, \{0\}$, 则$C^0$是正则的左$W^0$-系, 作圈积$W_1 = S \times F(A, W^0)$, 则$A\mathrm{wr}C^0$是正则的左$W_1$-系. 显然上述过程可以一直进行下去.

圈积的概念在半群理论、群理论、自动机理论中都有广泛的应用, 对圈积的研究成果已非常丰富.例如Knauer和Mikhalev[156]研究了圈积$A\mathrm{wr}B$的正则性和逆性; Normak [196]研究了$A\mathrm{wr}B$的投射性和强平坦性; Kilp和Kubjas[140]研究了$A\mathrm{wr}B$的主弱内射性; Kilp,Knauer和Mikhalev[138]研究了$A\mathrm{wr}B$的挠自由性及可除性; Kilp[129]研究了$A\mathrm{wr}B$的主弱平坦性. 另外, Knauer和Mikhalev还有研究圈积的系列性文章(文献[149]~ [156]). 本节以正则性为例阐述了关于圈积的研究思想. 关于圈积的其他研究成果请参阅所附参考文献.

§7.5 强忠实右S-系

由命题7.1.9知强忠实系一定是正则系, 而正则系未必是强忠实系.文献[133]、[134]、[109]等中利用右S-系的强忠实性刻画了幺半群. 本节利用条件(P)及相对平坦性给出强忠实右S-系的特征刻画. 其主要内容选自文献[175].

定义 7.5.1 设A和B分别是右、左S-系. 称B是满足条件(P_A)的, 是指: 关于任意$a, a' \in A$和任意$b, b' \in B$, 若在$A \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$, 则存在$b'' \in B, x_1, y_1 \in S$, 使得$ax_1 = a'y_1, b = x_1b'', b' = y_1b''$.

引理 7.5.2 左S-系B满足条件(P)当且仅当对于任意右S-系A, B满足条件(P_A).

证明 由命题4.2.14即知结论成立. □

定义 7.5.3 设A和B分别是右、左S-系. 称B是A-(主)平坦的, 如果对于A的所有(循环)子系A', 包含映射$A' \to A$所诱导的映射$A' \otimes B \to A \otimes B$是单的.

显然S_S-(主)平坦即为(主)弱平坦, 左S-系 B 是平坦的当且仅当对于所有右 S-系A, B是A-平坦的.

引理 7.5.4 若${}_SB$满足(P_A), 则${}_SB$是A-平坦的.

证明 设$a, a' \in A, b, b' \in B$, 并且在$A \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$. 只需证明在$(aS \cup a'S) \otimes B$中也有$a \otimes b = a' \otimes b'$即可. 由于$B$满足条件($\mathrm{P}_A$), 所以存在$b'' \in B, u, v \in S$,使得$au = a'v, b = ub'', b' = vb''$. 所以在$(aS \cup a'S) \otimes B$中有$a \otimes b = a \otimes ub'' = au \otimes b'' = a'v \otimes b'' = a' \otimes vb'' = a' \otimes b'$.所以$B$是$A$-平坦的. □

引理7.5.4的逆不成立. 令$S = \{1, 0\}, A = S$,

$$B = \{x, y, z | 0x = 0y = 0z = z, 1 \cdot x = x, 1 \cdot y = y, 1 \cdot z = z\},$$

则由定理4.3.7和定理4.3.16知B是平坦的, 因此B是A-平坦的, 但B不满足条件(P). 注意到(P_S)即为(P), 所以B不满足条件(P_A).

下面给出例子说明条件(P_A)不蕴含条件(P), A-平坦性不蕴含平坦性.

例 7.5.5 (1) 设幺半群S中有元素x, 它既不是左可逆元,也不是幂等元,则由命题5.5.2知$S/\rho(x, x^2)$不满足条件(P), 令$A = \{a\}$, 规定S在A上的作用为: $as = a$, 对任意$s \in S$. 设$b, b' \in S/\rho(x, x^2)$, 使得在$A \otimes S/\rho(x, x^2)$中有$a \otimes b = a \otimes b'$, 记1所在的$\rho(x, x^2)$类为$[1]_\rho$, 则存在$x_1, y_1 \in S$, 使得$b = x_1[1]_\rho, b' = y_1[1]_\rho, ax_1 = ay_1$. 所以左$S$-系$S/\rho(x, x^2)$满足条件($\mathrm{P}_A$).

(2) 令$S = \{a, b, c, 0, 1\}$, 非平凡元素的乘法按下表定义:

	a	b	c
a	0	a	a
b	0	b	b
c	0	c	c

可以证明S是一个幺半群. 因为$Sa = \{0, a\}$, 所以$aSa = \{0\}$, 因此a不是正则元. 由命题5.8.4知$S/\rho(a,0)$不是平坦的. 令$A = \{c, 0\}$. 容易验证A是S的右理想, 所以A是右S -系. A的真子系只有$A' = \{0\}$.所以左S -系$S/\rho(a,0)$是A-平坦的.

以下总是以T_R表示S的最大正则右理想.

引理 7.5.6 设A是正则右S -系, B是左S -系, 则B是A-主平坦的当且仅当对任意$b, b' \in B$, 任意$a \in A$,若在$A \otimes B$中有$a \otimes b = a \otimes b'$, 则存在$u \in E(S) \cap T_R$, 使得$au = a, ub = ub'$.

证明 设B是A-主平坦的, 并且在$A \otimes B$中有$a \otimes b = a \otimes b'$. 则在$aS \otimes B$中有$a \otimes b = a \otimes b'$, 所以存在$s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S, x_1, \cdots, x_n \in S, b_2, \cdots, b_n \in B$,使得:

$$
\begin{aligned}
&a = ax_1s_1, \\
&ax_1t_1 = ax_2s_2, \qquad s_1b = t_1b_2, \\
&\quad \cdots\cdots \qquad\qquad\quad \cdots\cdots \\
&ax_nt_n = a, \qquad\quad s_nb_n = t_nb'.
\end{aligned}
$$

因为a是A的正则元, 所以由命题7.1.2知存在$e \in E(S)$, 使得$\{a, e\}$是正则对, 显然有同构$aS \simeq eS$, 所以eS是正则右S -系, 从而$e \in T_R$. 由正则对的性质知有: $e = ex_1s_1, ex_1t_1 = ex_2s_2, \cdots, ex_nt_n = e$. 因此, $eb = ex_1s_1b = ex_1t_1b_2 = ex_2s_2b_2 = \cdots ex_nt_nb' = eb'$. 令$u = e$即可.

反之, 设在$A \otimes B$中有$a \otimes b = a \otimes b'$. 要证在$aS \otimes B$中也有$a \otimes b = a \otimes b'$. 由条件知存在$u \in E(S) \cap T_R$,使得$au = a, ub = ub'$, 所以在$aS \otimes B$中有:

$$
\begin{aligned}
a \otimes b &= au \otimes b = a \otimes ub \\
&= a \otimes ub' = au \otimes b' = a \otimes b',
\end{aligned}
$$

因此B是A-主平坦的. □

引理 7.5.7 设A和B分别是右、左S -系, 则如下几条是等价的:

(1) B是A-平坦的;

(2) 关于任意$a, a' \in A, b, b' \in B$, 若在$A \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$, 则存在$z \in aS \cap a'S, b'' \in B$, 使得在$(aS \cup a'S) \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b' = z \otimes b''$;

(3) B是A-主平坦的,并且关于任意$a, a' \in A, b, b' \in B$, 若在$A \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$, 则存在$b'' \in B, z \in aS \cap a'S$, 使得在$A \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b' = z \otimes b''$.

证明 (2)⇒(1)显然.

(1)⇒(2)设在$A \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$. 由于$B$是$A$-平坦的, 所以在$(aS \cup a'S) \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$. 因此存在$s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S, b_2, \cdots, b_n \in B, a_1, \cdots, a_n \in aS \cup a'S$, 使得:

$$\begin{aligned} & a = a_1 s_1, \\ & a_1 t_1 = a_2 s_2, \qquad s_1 b = t_1 b_2, \\ & \quad \cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots \\ & a_n t_n = a', \qquad s_n b_n = t_n b'. \end{aligned}$$

设$a_i = c_i u_i, c_i \in \{a, a'\}, u_i \in S$.在上述等式组中,总存在某个$i$,使得第$i$个等式的两边分别是$ap$和$a'q, p, q \in S$, 令$z_1 = a, z_j = c_{j-1} u_{j-1} t_{j-1}, 2 \leqslant j \leqslant n+1$,则$z_i \in aS \cap a'S$. 由上述等式组中的前$i$个行可知在$(aS \cup a'S) \otimes B$中有$a \otimes b = a_i s_i \otimes b_i$. 所以$a \otimes b = a_{i-1} t_{i-1} \otimes b_i = c_{i-1} u_{i-1} t_{i-1} \otimes b_i = z_i \otimes b_i$. 同理可知在$(aS \cup a'S) \otimes B$中有$a' \otimes b' = z_i \otimes b_i$, 令$z = z_i, b'' = b_i$即可.

(1)⇒(3)由已证明的结果知这是显然的.

(3)⇒(1)设在$A \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$. 由条件(3)知存在$b'' \in B, z \in aS \cap a'S$,使得在$A \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b' = z \otimes b''$. 设$z = as = a't$, 则在$A \otimes B$中有$a \otimes b = a \otimes sb''$. 因为$B$是$A$-主平坦的, 所以在$(aS \cup a'S) \otimes B$中有

$$\begin{aligned} a \otimes b &= a \otimes sb'' = as \otimes b'' = z \otimes b'' \\ &= a't \otimes b'' = a' \otimes tb'' = a' \otimes b'. \end{aligned}$$

□

引理 7.5.8 设A是正则右S-系, B是左S-系, 则B是A-平坦的当且仅当关于任意$x, y \in A$, 任意$b, b' \in B$, 如果在$A \otimes B$中有$x \otimes b = y \otimes b'$, 则存在$u, v \in E(S) \cap T_R, s, t \in S, b'' \in B$,使得

$$\begin{aligned} & xu = x, \quad yv = y, \quad xs = yt, \\ & ub = sb'', \quad vb' = tb''. \end{aligned} \tag{7.5.1}$$

证明 设B是A-平坦的,并且在$A \otimes B$中有$x \otimes b = y \otimes b'$. 由引理7.5.7知存在$z \in xS \cap yS, b'' \in B$, 使得在$(xS \cup yS) \otimes B$中有$x \otimes b = y \otimes b' = z \otimes b''$.

设$z = xs' = yt'$, 则在$(xS \cup yS) \otimes B$中有$x \otimes b = x \otimes s'b''$.由引理7.5.6知存在$u \in E(S) \cap T_R$, 使得$xu = x, ub = us'b''$. 同理存在$v \in E(S) \cap T_R$, 使得$yv = y, vb' = vt'b''$. 令$s = us', t = vt'$, 则$xs = xus' = xs' = yt' = yvt' = yt$.

反之, 设在$A \otimes B$中有$x \otimes b = y \otimes b'$. 由条件知存在$u, v \in E(S) \cap T_R, s, t \in S, b'' \in B$,使得式(7.5.1)成立, 所以在$(xS \cup yS) \otimes B$中有$x \otimes b = xu \otimes b = x \otimes ub = x \otimes sb'' = xs \otimes b'' = yt \otimes b'' = y \otimes tb'' = y \otimes vb' = yv \otimes b' = y \otimes b'$. 即$B$是$A$-平坦的. □

定理 7.5.9 对于右S -系A, 以下儿条等价:

(1) A是强忠实的;

(2) A是正则右S -系, 并且任意(有限生成)A-平坦的左S -系B满足条件(P_A);

(3) A是正则右S -系, 并且任意(有限生成)A-平坦的左S -系B满足条件(P).

证明 (1)⇒(3)对于任意$a \in A$,作S -同态$f : aS \to S$为$f(as) = s$(由A的强忠实性可知f 是有定义的). 显然$af(a) = a$, 所以a是正则元, 故A是正则的. 设B是A-平坦左S -系, $b, b' \in B; x, y \in S$, 使得$xb = yb'$. 任取$a \in A$, 在$A \otimes B$中有$ax \otimes b = a \otimes xb = a \otimes yb' = ay \otimes b'$. 由引理7.5.8知存在$u, v \in E(S) \cap T_R, s, t \in S, b'' \in B$,使得

$$ax = axu, \quad ay = ayv, \quad axs = ayt, \quad ub = sb'', \quad vb' = tb''.$$

由A的强忠实性可得$u = v = 1, xs = yt$. 从而$b = sb'', b' = tb''$, 故B满足条件(P).

(3)⇒(2)由引理7.5.2知这是显然的.

(2)⇒(1)设A不是强忠实系, 即存在$a \in A, r, r' \in S$, 使得$ar = ar', r \neq r'$. 因为A是正则的, 所以a是正则元, 因此存在$e \in E(S)$, 使得$\{a, e\}$是正则对, 故有$er = er'$. 因此e不是S的左可消元, 令C为S的所有左可消元构成的集合, 则$1 \in C, e \notin C$, 所以$S - C$是S的非平凡左理想.令$M = A(S - C)$, 则M是有限生成左S -系.

M不满足条件(P_A). 事实上,假定满足, 则因为$e(1, x) = (e, z) = e(1, y)$,所以在$A \otimes M$中有

$$\begin{aligned} a \otimes (1, x) &= ae \otimes (1, x) = a \otimes e(1, x) \\ &= a \otimes e(1, y) = ae \otimes (1, y) \\ &= a \otimes (1, y), \end{aligned}$$

故由(P_A)可知存在$m \in M, x_1, y_1 \in S$, 使得$ax_1 = ay_1, (1, x) = x_1 m, (1, y) = y_1 m$. 因为$M = S(1, x) \cup S(1, y)$, 所以$M = Sm$. 矛盾.

下面证明M是A-平坦的. 设$a, a' \in A$, (p, w), $(p', w') \in M$,使得在$A\otimes M$中有$a\otimes(p,w) = a'\otimes(p',w')$, 则存在$(p_2, w_2), \cdots, (p_n, w_n) \in M, u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n \in S, a_1, \cdots, a_n \in A$, 使得

$$\begin{aligned} &a = a_1u_1, \\ &a_1v_1 = a_2u_2, \qquad u_1(p,w) = v_1(p_2,w_2), \\ &\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots \\ &a_nv_n = a', \qquad u_n(p_n,w_n) = v_n(p',w'). \end{aligned}$$

这里$w, w', w_2, \cdots, w_n \in \{x, y, z\}$. 记$a_0 = a, a_{n+1} = a'$. 因为$A$是正则的, 所以存在$e_i \in E(S)$, 使得$\{a_i, e_i\}$是正则对, $i = 0, \cdots, n+1$, 所以有如下的等式组:

$$\begin{aligned} &ae_0 = a_1e_1u_1, \\ &a_1e_1v_1 = a_2e_2u_2, \qquad e_1u_1(p,w) = e_1v_1(p_2,w_2), \\ &a_2e_2v_2 = a_3e_3u_3, \qquad e_2u_2(p_2,w_2) = e_2v_2(p_3,w_3), \\ &\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots \\ &a_ne_nv_n = a'e_{n+1}, \qquad e_nu_n(p_n,w_n) = e_nv_n(p',w'). \end{aligned}$$

设S的最大正则左理想为T_R,则$T_R \neq \emptyset$. 易知,对任意$i = 0, 1, \cdots, n+1$,和任意$s \in S, e_is \in T_R$. 因为T_R作为左S-系是正则的, 所以存在$f_i \in E(S)\cap T_R$, 使得$\{e_iu_i, f_i\}$是正则对, 存在$f_i' \in E(S)\cap T_R$,使得$\{e_iv_i, f_i'\}$是正则对.记

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= e_1u_1p = e_1v_1p_2, \\ &\cdots\cdots \\ \alpha_i &= e_iu_ip_i = e_iv_ip_{i+1}, \\ &\cdots\cdots \\ \alpha_n &= e_nu_np_n = e_nv_np'. \end{aligned}$$

利用正则对的性质又有

$$\begin{aligned} ae_0f_1p &= a_1e_1u_1f_1p = a_1e_1u_1p = a_1e_1v_1p_2 \\ &= a_2e_2u_2p_2 = \cdots = a_ne_nu_np_n \\ &= a_ne_nv_np' = a_ne_nv_nf_n'p' = a'e_{n+1}f_n'p'. \end{aligned}$$

下面分情形作$ae_0S\cup a'e_{n+1}S$和M上的连接$(ae_0, (p,w))$和$(a'e_{n+1}, (p',w'))$ 的等式组:

(i)$\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in C$. 因为$e_i u_i p_i = e_i v_i p_{i+1} = \alpha_i \in C$, 所以由$M$的做法可知有:

$$e_i u_i(p_i, w_i) = (e_i u_i p_i, w_i),$$
$$e_i v_i(p_{i+1}, w_{i+1}) = (e_i v_i p_{i+1}, w_{i+1}).$$

所以由$e_i u_i(p_i, w_i) = e_i v_i(p_{i+1}, w_{i+1})$知$w_i = w_{i+1}$. 所以$w = w_2 = \cdots = w_n = w'$. 因此有如下的等式组:

$$\begin{aligned} &ae_0 = ae_0 f_1, \\ &ae_0 f_1 p = a' e_{n+1} f_n' p', \qquad && f_1(p, w) = f_1 p(1, w), \\ &a' e_{n+1} f_n' = a' e_{n+1}, && f_n' p'(1, w) = f_n'(p', w'). \end{aligned} \tag{7.5.2}$$

事实上, $ae_0 = a_1 e_1 u_1 = a_1 e_1 u_1 f_1 = ae_0 f_1$. 同理有$a' e_{n+1} f_n' = a' e_{n+1}$. 由于$e_1 u_1 p \in C$, 所以$p \in C$, 因此$w \in \{x, y\}$. 对任意$r, r' \in S$, 若$f_1 pr = f_1 pr'$, 则$e_1 u_1 pr = e_1 u_1 f_1 pr = e_1 u_1 f_1 pr' = e_1 u_1 pr'$. 利用$e_1 u_1 p \in C$可得$r = r'$. 所以$f_1 p \in C$, 因此有$f_1(p, w) = (f_1 p, w) = f_1 p(1, w)$. 同理$f_n' p'(1, w) = f_n'(p', w')$.

(ii)$\alpha_1 \in S - C$,$\alpha_n \in S - C$. 此时有如下的等式组:

$$\begin{aligned} &ae_0 = ae_0 f_1, \\ &ae_0 f_1 p = a' e_{n+1} f_n' p', \qquad && f_1(p, w) = f_1 p(1, x), \\ &a' e_{n+1} f_n' = a' e_{n+1}, && f_n' p'(1, x) = f_n'(p', w'). \end{aligned} \tag{7.5.3}$$

事实上,由(i)的证法可知式(7.5.3)中左边的等式均成立. 对任意$r, r' \in S$,若有$e_1 u_1 pr = e_1 u_1 pr'$, 则由正则对$\{e_1 u_1, f_1\}$的性质可知$f_1 pr = f_1 pr'$. 所在若$f_1 p \in C$, 则$e_1 u_1 p \in C$. 因此当$\alpha_1 \in S - C$时, $f_1 p \in S - C$. 故有$f_1(p, w) = (f_1 p, z) = f_1 p(1, x)$. 同理$f_n' p'(1, x) = f_n'(p', w')$.

(iii) $\alpha_1 \in C, \alpha_n \in S - C$, 类似于(i)、(ii)中的讨论可知此时仍有形如式(7.5.2)的等式组.

(iv) $\alpha_1 \in S - C$,$\alpha_n \in C$, 类似于(iii).

(v) $\alpha_1 \in C, \alpha_n \in C$, 但存在$\alpha_i \in S - C, i \in \{2, \cdots, n-1\}$. 此时$w \neq z$. 有如下的等式组:

$$\boxed{\begin{aligned} &ae_0 = ae_0 f_1, \\ &ae_0 f_1 p = a_i e_i u_i f_i p_i, \qquad && f_1(p, w) = f_1 p(1, w), \\ &a_i e_i u_i f_i p_i = a' e_{n+1} f_n' p', && f_i p_i(1, w) = f_i p_i(1, w'), \end{aligned}}$$
$$\begin{aligned} &a' e_{n+1} f_n' = a' e_{n+1}, \qquad && f_n' p'(1, w') = f_n'(p', w'). \end{aligned}$$

对于前四种情形，显然在$(aS \cup a'S) \otimes M$中有

$$\begin{aligned} a \otimes (p,w) &= ae_0 \otimes (p,w) \\ &= a'e_{n+1} \otimes (p',w') = a' \otimes (p',w'). \end{aligned}$$

对于最后一种情形,考虑框线以内的等式组,利用情形(iii)可知在$(ae_0S \cup a_ie_iu_if_ip_iS) \otimes M$中有

$$ae_0 \otimes (p,w) = a_ie_iu_if_ip_i \otimes (1,w')$$

因为$a_ie_iu_if_ip_i \in a'S$, 所以在$(aS \cup a'S) \otimes M$中有

$$\begin{aligned} a \otimes (p,w) &= ae_0 \otimes (p,w) \\ &= a_ie_iu_if_ip_i \otimes (1,w') \\ &= a'e_{n+1}f'_np' \otimes (1,w') \\ &= a'e_{n+1} \otimes f'_np'(1,w') \\ &= a'e_{n+1} \otimes f'_n(p',w') \\ &= a'e_{n+1}f'_n \otimes (p',w') \\ &= a'e_{n+1} \otimes (p',w') \\ &= a' \otimes (p',w'). \end{aligned}$$

这样就证明了M是A-平坦的.矛盾. □

第8章　序 S -系

序半群的S -系理论, 即所谓序S -系, 自20世纪80年代引入以来, 国际上关于该领域的研究较少. 从2005年开始, 由Bulman-Fleming, Laan以及石小平博士等, 提出了许多新的概念, 使得该领域的研究受到重视, 并成为当前S -系理论研究的一个热点. 本章简要介绍了序S -系的一些基础知识和公开问题.

关于序S -系, 其内容有类似于S -系的方面, 也有很多不同. 本章主要介绍序S -系与S -系区别较大的、新的内容，其他与S -系中定义和性质平行的部分, 可参见文献[28]、[223]、[224]等.

在本章中, 凡提到"S -系"及"S -同余"均指本书1~7章中所指, 而"序S -系"及"序S -同余"则指本章的定义.

§8.1　基 本 定 义

设A是非空集合, $\leqslant$是A上的一个二元关系, 如果$\leqslant$满足以下三个条件, 就称为A上的一个偏序:

(1)自反性: 任意的$a \in A$, 有$a \leqslant a$;

(2)反对称性: 任意的$a, b \in A$, 如果$a \leqslant b$并且$b \leqslant a$, 那么$a = b$;

(3)传递性: 任意的$a, b, c \in A$, 如果$a \leqslant b$并且$b \leqslant c$, 那么$a \leqslant c$.

设S是幺半群, S称为序幺半群, 如果存在S上的一个偏序$\leqslant$, 使得对任意的s, $s', u \in S$, 由$s \leqslant s'$推出$su \leqslant s'u$以及$us \leqslant us'$.

设S是序幺半群, A是一个带有偏序$\leqslant$的集合. f是$S \times A$到A的映射, 简记为$f(s, a) = sa$. 如果对任意的$a, a' \in A, s, s' \in S$, 满足以下条件:

(1) $(s's)a = s'(sa)$;

(2) $1a = a$;

(3) $a \leqslant a'$推出$sa \leqslant sa'$;

(4) $s \leqslant s'$推出$sa \leqslant s'a$.

则称(A, f)是序左S -系, 或称S序左作用于A上.为了方便起见, 简记为$_SA$或A. 同样的办法可以定义序右S -系.

设A是序左S -系，B是A的非空子集合.若对任意$b \in B$,任意$s \in S$,都有$sb \in$

B,则称B是A的序左S -子系.

设A, B是序左S -系, 称映射$f: A \to B$为从A到B的序S -同态，如果

(1) $f(sa) = sf(a), \quad \forall\, s \in S, \forall\, a \in A$;

(2) f是保序的, 即$a \leqslant a' \Rightarrow f(a) \leqslant f(a'), \quad \forall\, a, a' \in A$.

设A是序左S -系, θ是A上的等价关系, 若θ满足

(1) θ是S -系A上的同余(即本书§ 1.1.1中定义的同余);

(2) 在商S -系A/θ上具有偏序, 使得商集A/θ成为序S -系, 且自然的映射$A \to A/\theta$是序S -同态. 那么称θ是A上的序S -同余.

由于对给定的同余θ, 商S -系S/θ可能会具有不止一种序, 所以有必要指出考虑的是那种序. 例如，设$S = \{1\}$, 偏序集$\{a, b, 1\}$上的偏序为: a与b不可比较, 1是最大元. 令$\theta = \Delta$, 即A上的恒等关系, 则商集上的以下三种序都可以使θ成为A上的同余:

$$[a] \text{ 与 } [b] \text{ 不可比较, } [1] \text{ 是最大元,}$$

$$[a] < [b] < [1],$$

$$[b] < [a] < [1].$$

设A是序左S -系, $\leqslant$是A上的偏序, α是A上自反的,传递的二元关系, 并且满足

$$(a, a') \in \alpha \Rightarrow (sa, sa') \in \alpha, \quad \forall\, s \in S, \quad \forall\, a, a' \in A.$$

设$a, a' \in A$, 若存在$a_i, a_i' \in A, \ i = 1, 2, \cdots, m$, 使得

$$a \leqslant a_1 \alpha a_1' \leqslant a_2 \alpha a_2' \leqslant \cdots \leqslant a_m \alpha a_m' \leqslant a'$$

成立, 则称从a到a'有一个α-链, 记作$a \underset{\alpha}{\leqslant} a'$. 如果$a = a'$, 称为该$\alpha$链是闭的, 否则称之为开的.

利用上述的α, 在A上定义关系θ如下:

$$a \theta a' \Longleftrightarrow a \underset{\alpha}{\leqslant} a' \underset{\alpha}{\leqslant} a.$$

则θ成为A上的S -同余, 商集S/θ上的序自然地定义为

$$[a]_\theta \leqslant [a']_\theta \Longleftrightarrow a \underset{\alpha}{\leqslant} a'.$$

则θ成为A上的序S -同余. 并且如果η是A上的序S -同余, $\alpha \subseteq \eta$, 那么$\theta \subseteq \eta$. 因为假设$\alpha \subseteq \eta$, 并且$a \underset{\alpha}{\leqslant} a'$, 则存在如下的$\alpha$-链:

$$a \leqslant a_1 \alpha a_1' \leqslant a_2 \alpha a_2' \leqslant \cdots \leqslant a_m \alpha a_m' \leqslant a'$$

因此, $[a]_\eta \leqslant [a']_\eta$; 类似地$a' \underset{\alpha}{\leqslant} a$可推出$[a']_\eta \leqslant [a]_\eta$, 所以$\theta \subseteq \eta$, 称$\theta$为由$\alpha$生成的序$S$ -同余. 特别的, 如果$H \subseteq A \times A$而且α是由H生成的S -同余, 则相应的序S -同余$\theta(H)$称为由H生成的序S -同余.

设A是序左S -系, $H \subseteq A \times A$. 定义A上的关系$\alpha(H)$为: $a\alpha(H)a'$当且仅当$a = a'$或者

$$\begin{aligned} a &= s_1x_1, \\ s_1y_1 &= s_2x_2, \\ &\cdots\cdots, \\ s_{n-1}y_{n-1} &= s_nx_n, \\ s_ny_n &= a'. \end{aligned}$$

其中$(x_i, y_i) \in H$, $s_i \in S$. 注意到$\alpha(H)$是自反的, 传递的二元关系, 并且对任意的$a, a' \in A$, $s \in S$, $a\alpha(H)a'$推出$sa\alpha(H)sa'$. 因此如下定义的关系$\nu(H)$:

$$a\nu(H)a' \Longleftrightarrow a \underset{\alpha(H)}{\leqslant} a' \underset{\alpha(H)}{\leqslant} a.$$

是包含$\alpha(H)$的最小序S -同余, 称为由H诱导的同余. 在$S/\nu(H)$中$[a]_{\nu(H)} \leqslant [a']_{\nu(H)} \Longleftrightarrow a \underset{\alpha(H)}{\leqslant} a'$. 而且若$H \subseteq A \times A$, β是A上的序S -同余, 使得任意的$(x, y) \in H$推出$[x]_\beta \leqslant [y]_\beta$, 则必有$\nu(H) \subseteq \beta$. A上由H生成的最小序S -同余$\theta(H) = \nu(H \cup H^{\mathrm{op}})$.

Fakhruddin[68]指出, 如果θ是序左S -系E上的等价关系, 并且

$$(e, e') \in \theta \Rightarrow (se, se') \in \theta, \quad \forall\, s \in S, \quad \forall\, e, e' \in E.$$

那么θ是E上的序S -同余当且仅当每一个θ链包含在θ的同一个等价类中. 这是判断一个序左S -系上的等价关系成为序S -同余的重要依据.

§8.2　序S -系的平坦性

本节的主要结果选自文献[28]、[223]、[224].

定义 8.2.1　设A是序右S -系, B是序左S -系, $A \times B$表示集合A和B的卡氏积. 在$A \times B$上定义偏序$(a, b) \leqslant (c, d) \Leftrightarrow a \leqslant c$ 并且 $b \leqslant d$, 其中$a, c \in A$, $b, d \in B$. 令

$$H = \{((as, b), (a, sb)) \mid a \in A, b \in B, s \in S\},$$

记$\rho=\rho(H)$为由H生成的$A\times B$上的序同余. 称商集$(A\times B)/\rho$为A和B在S上的张量积, 记为$A\otimes_s B$.

对任意$a\in A, b\in B, (a,b)$所在的等价类记为$a\otimes b$.显然对任意$a\in A, b\in B, s\in S, as\otimes b=a\otimes sb$. 下面的定理可用来判断$A\otimes B$中的两个元素是否相等.

定理 8.2.2 设A是序右S-系, B是序左S-系, $a,a'\in A, b,b'\in B$. 则在$A\otimes B$中$a\otimes b=a'\otimes b'$的充要条件是: 存在$a_1,a_2,\cdots,a_n,c_1,c_2,\cdots,c_m\in A$, $b_2,\cdots b_n,d_2,\cdots d_m\in B$, $s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n\in S, u_1,v_1,\cdots,u_m,v_m\in S$, 使得

$$\begin{array}{ll} a\leqslant a_1s_1, & \\ a_1t_1\leqslant a_2s_2, & s_1b\leqslant t_1b_2,\\ a_2t_2\leqslant a_3s_3, & s_2b_2\leqslant t_2b_3,\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_nt_n\leqslant a', & s_nb_n\leqslant t_nb';\\ a'\leqslant c_1u_1, & \\ c_1v_1\leqslant c_2u_2, & u_1b'\leqslant v_1d_2,\\ c_2v_2\leqslant c_3u_3, & u_2d_2\leqslant v_2d_3,\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ c_mv_m\leqslant a, & u_md_m\leqslant v_mb. \end{array} \tag{8.2.1}$$

证明 对任意的$a,a'\in A,\ b,b'\in B$, 定义$A\times B$上的关系σ为$(a,b)\sigma(a',b')$当且仅当式(8.2.1)成立. 易证σ是A上的等价关系. 下证σ为$A\times B$上的序S-同余. 假设$a,a_i,a_i'\in A,\ b,b_i,b_i'\in B,\ i=1,2,\cdots,n$, 并且

$$\begin{aligned}(a,b)&\leqslant(a_1,b_1)\sigma(a_1',b_1')\leqslant(a_2,b_2)\sigma(a_2',b_2')\\ &\leqslant\cdots\leqslant(a_j,b_j)\sigma(a_j',b_j')\leqslant\cdots\\ &\leqslant(a_{n-1},b_{n-1})\sigma(a_{n-1}',b_{n-1}')\\ &\leqslant(a_n,b_n)\sigma(a_n',b_n')\\ &\leqslant(a,b).\end{aligned} \tag{8.2.2}$$

那么对任意的$k \in \{1,2,\cdots,n\}$, 相应地有以下一组式子成立:

$$\begin{array}{ll}
a_k \leqslant a_{k,1}s_{k,1}, & \\
a_{k,1}t_{k,1} \leqslant a_{k,2}s_{k,2}, & s_{k,1}b_k \leqslant t_{k,1}b_{k,2}, \\
a_{k,2}t_{k,2} \leqslant a_{k,3}s_{k,3}, & s_{k,2}b_{k,2} \leqslant t_{k,2}b_{k,3}, \\
\quad\cdots\cdots & \quad\cdots\cdots \\
a_{k,p_k}t_{k,p_k} \leqslant a'_k, & s_{k,p_k}b_{k,p_k} \leqslant t_{k,p_k}b'_k; \\
a'_k \leqslant c_{k,1}u_{k,1}, & \\
c_{k,1}v_{k,1} \leqslant c_{k,2}u_{k,2}, & u_{k,1}b'_k \leqslant v_{k,1}d_{k,2}, \\
c_{k,2}v_{k,2} \leqslant c_{k,3}u_{k,3}, & u_{k,2}d_{k,2} \leqslant v_{k,2}d_{k,3}, \\
\quad\cdots\cdots & \quad\cdots\cdots \\
c_{k,q_k}v_{k,q_k} \leqslant a_k, & u_{k,q_k}d_{k,q_k} \leqslant v_{k,q_k}b_k.
\end{array}$$

其中每一个元素属于那个集合是显然的, 这里不再赘述. 利用张量积$A \times B$上的偏序定义、σ 的定义以及式 (8.2.2), 容易证得对任意的 $k \in \{1,2,\cdots,n\}$ 有 $(a,b)\sigma(a'_k,b'_k)$. 因为$(a_k,b_k)\sigma(a'_k,b'_k)$, 所以$(a,b)\sigma(a_k,b_k)$. 这说明每一个闭的$\sigma$链包含在$\sigma$的同一个等价类中, 故$\sigma$是$A \times B$上的同余. 因为

$$\begin{array}{ll}
as \leqslant a \cdot s, & \\
a \cdot 1 \leqslant a, & s \cdot b \leqslant 1 \cdot sb, \\
a \leqslant a \cdot 1, & \\
a \cdot s \leqslant as, & sb \leqslant s \cdot b.
\end{array}$$

所以$(as,b)\sigma(a,sb)$, 但σ是同余, 故$\rho \subseteq \sigma$.

另一方面, 若 $(a,b)\sigma(a',b')$, 由 σ 的定义知式 (8.2.1)成立, 因此 $(a,b) \leqslant (a_1s_1,b)H(a_1,s_1b) \leqslant (a_1,t_1b_2)H(a_1t_1,b_2) \leqslant \cdots \leqslant (a_ns_n,b_n)H(a_n,s_nb_n) \leqslant (a_n,t_nb')H(a_nt_n,b') \leqslant (a',b')$.故$(a,b) \underset{H}{\leqslant} (a',b')$. 同理有$(a',b') \underset{H}{\leqslant} (a,b)$. 所以由§ 8.1.1有$(a,b)\rho(a',b')$, 故$\sigma \subseteq \rho$. 所以$\rho = \sigma$. □

注 8.2.3 张量积$A \underset{S}{\otimes} B$上的序如下定义: 在$A \underset{S}{\otimes} B$中$a \otimes b \leqslant a' \otimes b'$当且仅当存在$a_1,\cdots,a_n \in A$, $b_2,\cdots,b_n \in B$, $s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n \in S$, 使得

$$\begin{array}{ll}
a \leqslant a_1s_1, & \\
a_1t_1 \leqslant a_2s_2, & s_1b \leqslant t_1b_2,
\end{array}$$

$$a_2t_2 \leqslant a_3s_3, s_2b_2 \leqslant t_2b_3,$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$a_nt_n \leqslant a', \quad s_nb_n \leqslant t_nb'.$$

定义 8.2.4 称序左S-系B是平坦的,如果对任意的序右S-系A, 以及$a, a' \in A$, $b, b' \in B$, 在$A \otimes B$中$a \otimes b = a' \otimes b'$可以推出在$(aS \cup a'S) \otimes B$中$a \otimes b = a' \otimes b'$. 称序左$S$-系B是弱平坦的,如果对任意的$s, t \in S, b, b' \in B$在$S \otimes B$中$s \otimes b = t \otimes b'$,可以推出在$(sS \cup tS) \otimes B$中$s \otimes b = t \otimes b'$.称序左$S$-系$B$是主弱平坦的,只需要求弱平坦定义中$s = t$. 这与$S$-系的平坦、弱平坦、主弱平坦定义类似.

定义 8.2.5 称序左S-系B是序平坦的, 如果对任意的序右S-系A, 以及$a, a' \in A$, $b, b' \in B$, 在$A \otimes B$中$a \otimes b \leqslant a' \otimes b'$可以推出在$(aS \cup a'S) \otimes B$中$a \otimes b \leqslant a' \otimes b'$.称序左$S$-系B是序平坦的,如果对任意的$s, t \in S, b, b' \in B$在$S \otimes B$中$s \otimes b \leqslant t \otimes b'$,可以推出在$(sS \cup tS) \otimes B$中$s \otimes b \leqslant t \otimes b'$.称序左$S$-系$B$是序主弱平坦的,只需要求序弱平坦定义中$s = t$.

定义 8.2.6 称序左S-系A满足条件(P), 如果对任意的$s, s' \in S$, 任意的$a, a' \in A$, 若$sa \leqslant s'a'$, 则存在$a'' \in A, u, v \in S$, 使得$su \leqslant s'v, a = ua'', a' = va''$.

定义 8.2.7 称序左S-系A满足条件(Pw),如果对任意的$s, s' \in S$, 任意的a, $a' \in A$,若$sa \leqslant s'a'$,则存在$a'' \in A, u, v \in S$, 使得$su \leqslant s'v, a \leqslant ua'', va'' \leqslant a'$.

定义 8.2.8 称序左S-系A满足条件(E), 如果对任意的$s, s' \in S$, 任意的$a \in A$, 若$sa \leqslant s'a$, 则存在$a'' \in A, u \in S$, 使得$su \leqslant s'u, a = ua''$.

定义 8.2.9 设S是序幺半群, $c \in S$. c称为序右可消的, 如果对任意的$s, t \in S$, 由$sc \leqslant tc$推出$s \leqslant t$.

每一个序右可消元一定是通常意义上的右可消元.

定义 8.2.10 序左S-系A称为序挠自由的, 如果对任意的$a, b \in A$, 以及任意的序左可消元$s \in S$, 由$sa \leqslant sb$推出$a \leqslant b$.

定义 8.2.11 序左S-系A称为挠自由的, 如果对任意的$a, b \in A$, 以及任意的左可消元$s \in S$, 由$sa = sb$推出$a = b$.

下面的命题8.2.12指出了序S-系和S-系性质的一个重要区别.

命题 8.2.12 对任意序幺半群S, 总存在序左S-系不满足条件(P).

证明 设S是序幺半群, $B = \{x, y\}$是一个链, B上的序定义为$x < y$. 任意的$s \in S$, 规定$sx = x, sy = y$, 则B成为序左S-系且不满足条件(P). □

相应于S-系, 序S-系的其他性质, 诸如自由、投射等的定义, 和S-系类似, 它们的相互关系如下:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\text{自由}\Rightarrow\text{投射}\Rightarrow\text{条件(P)} & & & & & & \\
\Downarrow & & & & & & \\
\text{条件(Pw)} & & & & & & \\
\Downarrow & & & & & & \\
\text{序平坦} & \Rightarrow & \text{序弱平坦} & \Rightarrow & \text{序主弱平坦} & \Rightarrow & \text{序挠自由} \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Updownarrow \\
\text{平坦} & \Rightarrow & \text{弱平坦} & \Rightarrow & \text{主弱平坦} & \Rightarrow & \text{挠自由}
\end{array}
$$

在上图中, 目前还没有反例表明序平坦一定不能推出条件(Pw). 除此之外, 其他的蕴含关系都不可逆.

§8.3 序Rees商S -系

在本节开始, 首先给出一元序左S -系$_S\Theta = \{\theta\}$的平坦性刻画.

本节的结果主要选自文献[28].

定理 8.3.1 对任意序幺半群S, 以下结论成立:

(1) $_S\Theta$是自由的当且仅当$S = \{1\}$.

(2) $_S\Theta$是投射的当且仅当S包含右零元.

(3) $_S\Theta$满足条件(E)当且仅当对任意$s, t \in S$, 存在$u \in S$, 使得$su = tu$.

(4) 下述条件等价:

(a) $_S\Theta$满足条件(P);

(b) $_S\Theta$满足条件(Pw);

(c) $_S\Theta$是序平坦的;

(d) $_S\Theta$是平坦的;

(e) $_S\Theta$是序弱平坦的;

(f) $_S\Theta$是弱平坦的;

(g) 对任意的$s, t \in S$, 存在$u, v \in S$, 使得$su \leqslant tv$.

证明 仅证明结论(3)以及(4).(f)⇒(4).(g)⇒(4).(a). 其余证明和S -系的证明类似.

(3)的证明: 显然$_S\Theta$满足条件(E)当且仅当对任意$s, t \in S$, 存在$w \in S$, 使得$sw \leqslant tw$. 对s, t, w, 再次利用条件(E), 知存在$v \in S$, 使得$twv \leqslant swv$. 由$sw \leqslant tw$以及序幺半群的相容性可得$swv \leqslant twv$. 令$u = wv$, 那么显然有$su = tu$.

(4).(f)⇒(4).(g) 设$_S\Theta = \{\theta\}$是弱平坦的, 任取$s, t \in S$. 因为$s\theta = t\theta = \theta$, 故$s \otimes \theta = t \otimes \theta$在$S \otimes \Theta$中成立, 也在$(sS \cup tS) \otimes \Theta$中成立, 这说明以下一组式

子成立:

$$\begin{aligned} s &\leqslant s_1u_1, & & \\ s_1v_1 &\leqslant s_2u_2, & u_1\theta &\leqslant v_1\theta, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ s_nu_n &\leqslant t, & u_n\theta &\leqslant v_n\theta. \end{aligned}$$

其中$u_i, v_i \in S$, $s_i \in \{s,t\}, i=1,2,\cdots,n$. 记$v_0=u_{n+1}=1$, 显然存在某个$k\in\{0,1,\cdots,n\}$, 使得$sv_k \leqslant tu_{k+1}$.

(4).(g)⇒(4).(a) 由条件(P)的定义易知显然.

设S是序幺半群, K是S的左理想($SK\subseteq K$). 由§ 8.1.1 中同余的构造容易证明, 左Rees商序S-系$S/\nu(K\times K)$也是左Rees商S-系(即K是其仅有的非平凡的同余类)当且仅当左理想K是S的凸子集($\forall\, k,l\in K, s\in S, k\leqslant s\leqslant l\Rightarrow s\in K$). 将$S/\nu(K\times K)$简记为$S/K$, 对任意的$s\in S$, s所在的同余类记作$[s]$.

下面的引理8.3.2给出了左Rees商序S-系S/K上序的刻画.

引理 8.3.2 设K是序幺半群S的凸的真左理想, 则对任意的$x,y\in S$, 在S/K中

$$[x]\leqslant[y] \Longleftrightarrow x\leqslant y \text{ 或者存在 } k,k'\in K, \text{ 使得 } x\leqslant k, k'\leqslant y.$$

证明 由序同余以及K是S的凸真左理想的定义,显然. □

引理 8.3.3 设K是序幺半群S的凸的真左理想, M是任意的序右S-系, $m,m'\in M$. 那么在$M\otimes S/K$中$m\otimes[1]\leqslant m'\otimes[1]$当且仅当$m\leqslant m'$或者

$$\begin{aligned} m &\leqslant m_1k_1, \\ m_1k_1' &\leqslant m_2k_2, \\ &\cdots\cdots \\ m_nk_n' &\leqslant m'. \end{aligned}$$

其中$k_i,k_i'\in K$, $m_i\in M, i=1,2,\cdots,n$.

证明 充分性 若$m\leqslant m'$, 那么由注8.2.3可知$m\otimes[1]\leqslant m'\otimes[1]$. 另一方面, 若引理中的一组式子成立, 则在$M\otimes S/K$中

$$\begin{aligned} m\otimes[1] &\leqslant m_1k_1\otimes[1] = m_1\otimes[k_1] = m_1\otimes[k_1'] = m_1k_1'\otimes[1] \\ &\leqslant m_2k_2\otimes[1] = \cdots \\ &\leqslant m_nk_n\otimes[1] = m_n\otimes[k_n] = m_n\otimes[k_n'] = m_nk_n'\otimes[1] \\ &\leqslant m'\otimes[1]. \end{aligned}$$

必要性　假设在$M \otimes S/K$中$m \otimes [1] \leqslant m' \otimes [1]$, 故由注8.2.3可知有如下一组式子成立:

$$\begin{aligned} & m \leqslant m_1k_1, & & \\ & m_1k_1' \leqslant m_2k_2, & & k_1[1] \leqslant k_1'[1], \\ & \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ & m_nk_n \leqslant m', & & k_n[1] \leqslant k_n'[1]. \end{aligned}$$

在上式中, 若存在i使得$k_i \leqslant k_i'$, 则上一组式子显然可以缩短. 如果任意的i都有$k_i \leqslant k_i'$, 那么显然易得$m \leqslant m'$. 否则, 将满足$k_i \leqslant k_i'$的部分缩短, 由缩短后的式子显然得所需结果. □

命题 8.3.4　设K是序幺半群S的凸的真左理想. 那么S/K是挠自由的当且仅当对任意的$s \in S$, 任意的左可消元$c \in S$,

$$cs \in K \text{ 推出 } s \in K.$$

证明　类似于S -系的证明. □

命题 8.3.5　设K是序幺半群S的凸的真左理想. 那么S/K是序挠自由的当且仅当对任意的$s, t \in S$, 任意的序左可消元$c \in S$以及$k, l \in K$, 由$cs \leqslant k$, $l \leqslant ct$推出存在$k', l' \in K$, 使得$s \leqslant k'$, $l' \leqslant t$.

证明　必要性　设c是序左可消元, $k \in K$, $s \in S$并且$cs \leqslant k$. 那么在S/K中$c[s] \leqslant c[k]$, 故$[s] \leqslant [k]$. 由引理8.3.2知存在$k' \in K$使得$s \leqslant k'$. 对$l \leqslant ct$的讨论与之类似.

充分性　任取$s, t \in S$,序左可消元$c \in S$,使得$c[s] \leqslant c[t]$. 若$cs \leqslant ct$,结论显然.否则存在$k', l' \in K$, 使得$s \leqslant k'$, $l' \leqslant t$, 此即$[s] \leqslant [t]$. □

命题 8.3.6　设K是序幺半群S的凸的真左理想. 那么S/K是主弱平坦的当且仅当对任意的$k \in K$, 存在$k', k'' \in K$, 使得$kk' \leqslant k \leqslant kk''$.

证明　必要性 设$k \in K$. 因为在$kS \otimes S/K$中$k \otimes [1] = k^2 \otimes [1]$, 由引理8.3.3知下面一组式子成立:

$$\begin{aligned} & k \leqslant kk_2, \\ & kk_2' \leqslant kk_3, \\ & \cdots\cdots \\ & kk_n' \leqslant k^2; \end{aligned}$$

$$k^2 \leqslant kl_2,$$
$$kl_2' \leqslant kl_3,$$
$$\cdots\cdots$$
$$kl_m' \leqslant k.$$

上式中出现的所有元素均在K中, 由第一个和最后一个式子可得结论成立. 对$k \leqslant k^2$或者$k^2 \leqslant k$的情形证明显然.

充分性　任取$u, v, s \in S$使得在S/K中$[su] = [sv]$. 如果$su = sv$, 则在$sS \otimes S/K$中$su \otimes [1] = sv \otimes [1]$. 否则$su, sv \in K$, 必存在$k, k', k_1, k_1' \in K$使得

$$suk \leqslant su \leqslant suk',$$
$$svk_1 \leqslant sv \leqslant svk_1'.$$

在$sS \otimes S/K$中有

$$\begin{aligned} su \otimes [1] &\leqslant suk' \otimes [1] = s \otimes [uk'] \\ &= s \otimes [vk_1] = svk_1 \otimes [1] \leqslant sv \otimes [1], \\ sv \otimes [1] &\leqslant svk_1' \otimes [1] = s \otimes [vk_1'] \\ &= s \otimes [uk] = suk \otimes [1] \leqslant su \otimes [1]. \end{aligned}$$

即S/K是主弱平坦的. □

命题 8.3.7　设K是序幺半群S的凸的真左理想. 那么S/K是序主弱平坦的当且仅当对任意的$k \in K$, $s \in S$,

$$k \leqslant s \Rightarrow (\exists k' \in K)(sk' \leqslant s) \text{ 并且}$$
$$s \leqslant k \Rightarrow (\exists k' \in K)(s \leqslant sk').$$

证明　必要性　设$k \in K, s \in S$,使得$k \leqslant s$,则在$kS \otimes S/K$中$[sk] \leqslant [s]$, 故在$sS \otimes S/K$中

$$sk \otimes [1] \leqslant s \otimes [1].$$

由引理8.3.3知要么$sk \leqslant s$, 要么下面一组式子成立:

$$sk \leqslant sk_1,$$
$$sk_1' \leqslant sk_2,$$

$$\cdots\cdots$$

$$sk_n' \leqslant s.$$

其中$k_i, k_i' \in K$, 由最后一个式子可得结论成立. 对$s \leqslant k$的情形证明类似.

充分性　任取$u, v, s \in S$使得在S/K中$[su] \leqslant [sv]$. 如果$su \leqslant sv$, 则在$sS \otimes S/K$中$su \otimes [1] \leqslant sv \otimes [1]$. 否则必存在$k, l \in K$, 使得$su \leqslant k$, $l \leqslant sv$. 由假设的条件, 存在$k', l' \in K$, 使得$su \leqslant suk'$, $svl' \leqslant sv$, 故在$sS \otimes S/K$中有

$$su \otimes [1] \leqslant suk' \otimes [1] = s \otimes [uk'] = s \otimes [vl'] = svl' \otimes [1] \leqslant sv \otimes [1].$$

即S/K是序主弱平坦的. □

推论 8.3.8　若S是正则的序幺半群, 则任意序左S -系是序主弱平坦的.

证明　设A是序左S -系, S是正则的序幺半群. 任意的$a, a' \in A, v \in S$, 若$va \leqslant va'$. 记v'是v的逆元, 那么在$vS \otimes A$中有

$$v \otimes a = vv'v \otimes a = vv' \otimes va \leqslant vv' \otimes va' = vv'v \otimes a' = v \otimes a'.$$

故A是序主弱平坦的. □

命题 8.3.9　设K是序幺半群S的凸的真左理想. 那么S/K是序弱平坦的当且仅当S/K是序主弱平坦的, 并且对任意的$s, t \in S$, 存在$u, v \in S$, 使得$su \leqslant tv$.

证明　必要性　显然S/K是序主弱平坦的. 对任意的$s, t \in S$, 任取$k \in K$. 显然$s[k] = t[k]$. 由S/K的序弱平坦性, 在$(sS \cup tS) \otimes S/K$中有$sk \otimes [1] \leqslant tk \otimes [1]$. 由引理8.3.3易得结论.

充分性　任取$s, t \in S$, 使得在S/K中$[s] \leqslant [t]$. 若$s \leqslant t$, 结论已证. 否则, 存在$k, l \in K$, 使得$s \leqslant k, l \leqslant t$. 由$S/K$是序弱平坦的知存在$k', l' \in K$, 使得$s \leqslant sk', tl' \leqslant t$. 并且存在$p, p' \in S$, 使得$sp \leqslant tp'$. 所以有

$$\begin{aligned} s \otimes [1] &\leqslant sk' \otimes [1] = s \otimes [k'] = s \otimes [pk'] = sp \otimes [k'] \leqslant tp' \otimes [k'] \\ &= t \otimes [p'k'] = t \otimes [l'] \leqslant tl' \otimes [1] \leqslant t \otimes [1]. \end{aligned}$$

即S/K是序弱平坦的. □

命题 8.3.10　设K是序幺半群S的凸的真左理想. 那么S/K是弱平坦的当且仅当S/K是主弱平坦的, 并且对任意的$s, t \in S$, 存在$u, v \in S$, 使得$su \leqslant tv$.

证明　必要性　类似于命题8.3.8的证明.

充分性　任取$s, t, u, v \in S$, 使得在S/K中$[su] = [tv]$, 则在$(sS \cup tS) \otimes S/K$中$su \otimes [1] = tv \otimes [1]$. 若$su = tv$, 结论已证. 否则, $su, tv \in K$, 由假设及

命题8.3.6存在$k, k', k_1, k_1' \in K$, 使得

$$suk \leqslant su \leqslant suk',$$
$$tvk_1 \leqslant tv \leqslant tvk_1'.$$

并且由假设易得$p, p', q, q' \in S$, 使得$sp \leqslant tp'$, $tq \leqslant sq'$, 故在$(sS \cup tS) \otimes S/K$中有

$$\begin{aligned} su \otimes [1] &\leqslant suk' \otimes [1] = s \otimes [uk'] = s \otimes [puk'] \\ &= sp \otimes [uk'] \leqslant tp' \otimes [uk'] \\ &= t \otimes [p'uk'] = t \otimes [vk_1] \leqslant tvk_1 \otimes [1] \\ &\leqslant tv \otimes [1]. \end{aligned}$$

类似地有

$$\begin{aligned} tv \otimes [1] &\leqslant tvk_1' \otimes [1] = t \otimes [vk_1'] = t \otimes [qvk_1'] \\ &= tq \otimes [vk_1'] \leqslant sq' \otimes [vk_1'] \\ &= s \otimes [q'vk_1'] = s \otimes [uk] \leqslant suk \otimes [1] \\ &\leqslant su \otimes [1]. \end{aligned}$$

即S/K是弱平坦的. □

设K是序幺半群S的凸的真左理想, 如何给出S/K是平坦、序平坦以及满足条件(P_w)的等价刻画, 至今仍是没有解决的问题.

关于右绝对平坦的序幺半群, 在限定序幺半群是完全单的幺半群时, 在文献[28]中给出了部分解决.

同时, 相应于S-系的同调分类问题, 自然有序S-系的同调分类问题, 目前只得到了部分研究成果.可以说,关于序S-系的研究才刚刚开始,还有大量问题遗留着, 有待于进一步解决.

参考文献

[1] Ahsan J. Monoids characterized by their quasi-injective S-systems. Semigroup Forum, 36 (1987), 285~292

[2] Ahsan J. Hereditary and cohereditary S-acts. Tartu Riikl. ul. Toimetised, 856 (1989), (with Russian and Estonian summaries)

[3] Ahsan J. Fully idempotent semirings. Proc. Japan Acad., 69, Ser. A, (1993), 185~188

[4] Ahsan J, Khan M F, Shabir M, Takahashi M. Characterizations of monoids by P-injective and normal S-systems. Kobe J. Math., 8 (1991), 173~192

[5] Ahsan J, Liu Zhongkui. On relatively injective and weakly injective S-acts. Southeast Asian Bull.Math., 21(1997), 249~256

[6] Ahsan J, Liu Zhongkui. Prime and semiprime acts over monoids with zero. Math. J. Ibaraki Univ., 33 (2001), 9~15

[7] Ahsan J, Saifullah K. Completely quasi-projective monoids. Semigroup Forum, 38(1989), 123~126

[8] Ahsan J, Takahashi M. Pure spectrum of a monoid with zero. Kobe J. Math., 6 (1989), 163~182

[9] Anderson F W, Fuller K R. Rings and Categories of Modules. Springer-Verlag, New York, 1974

[10] Banaschewski B. Equational compactness of G-sets. Canad. Math.Bull.,17(1974), 11~18

[11] Barja J M, Rodeja E G. Morita equivalence of monoids. Semigroup Forum, 19(1980), 101~106

[12] Bentz W, Bulman-Fleming S. On equalizer-flat acts. Semigroup Forum, 58(1999), 5~16

[13] Berdon G E. Sheaf Theory. McGraw-Hill Series in Higher Math., 1967

[14] Berthiaume P. The injective envelope of S-acts. Canad. Math. Bull., 10 (1967), 261~273

[15] Birkhoff G. Lattice Theory. Amer. Math. Soc. Colloquium Pubn., Vol. 25, 1940

[16] Bjork J E. Rings satisfying a minimum condition on principal ideals. J. Reine Angew. Math., 236(1969), 112~119

[17] Brown B, McCoy N H. Some theorems on groups with applications to ring theory. Trans. Amer. Math. Soc., 69 (1950), 302~311

[18] Bruns G, Lakser H. Injective hulls of semilattices. Canad.Math.Bull., 13(1970), 115~118

[19] Bulman-Fleming S. Pullback flat acts are strongly flat. Canad. Math. Bull., 34(1991), 1~6

[20] Bulman-Fleming S. Products of projective S-systems. Comm. Algebra, 19(1991), 951~964

[21] Bulman-Fleming S. Flat and strongly flat S-systems. Comm. Algebra, 20(1992), 2553~2567

[22] Bulman-Fleming S. Regularity and products of idempotents in endomorphism monoids of projective acts. Mathematika, 42(1995), 354~367

[23] Bulman-Fleming S. The classification of monoids by flatness properties of acts, in J. M. Howie and N. Ruškuc (eds.). "Proceedings of the Conference on Semigroups and Applications, St. Andrews, U.K.", World Scientific, London, 1998

[24] Bulman-Fleming S. Flatness properties of acts over commutative, cancellative monoids. Mathematika, 46 (1999), 93~102

[25] Bulman-Fleming S. Absolutely annihilator-flatmonoids. Semigroup Forum, 65 (2002), 428~449

[26] Bulman-Fleming S, Gould V. On left absolutely flat monoids. Semigroup Forum, 41(1990), 55~59

[27] Bulman-Fleming S, Gould V. Axiomatisability of weakly flat, flat, and projective S-acts. Comm. Algebra, 30(2002), 5575~5593

[28] Bulman-Fleming S, Gutermuth D, Gilmour A, Kilp M. Flatness properties of S-posets. Comm. Algebra, 34(2006), 1291~1317

[29] Bulman-Fleming S, Kilp M. Flatness properties of acts: some examples. Semigroup Forum, 55(1997), 167~176

[30] Bulman-Fleming S, Kilp M. Equalizers and flatness properties of acts. Comm. Algebra, 30 (2002), 1475~1498

[31] Bulman-Fleming S, Kilp M. Equalizers and flatness properties of acts II. Semigroup Forum, 68(2003), 209~217

[32] Bulman-Fleming S, Kilp M, Laan V. Pullbacks and flatness properties of acts II. Comm. Algebra, 29(2001), 851~878

[33] Bulman-Fleming S, Laan V. Tensor products and preservation of limits, for acts over monoids. Semigroup Forum, 63(2001), 161~179

[34] Bulman-Fleming S, Laan V. Lazard's Theorem for S-posets. Math. Nachr., 278(2005), 1743~1755

[35] Bulman-Fleming S, Mahmoudi M. The category of S-posets. Semigroup Forum, 71(2005), 443~461

[36] Bulman-Fleming S, McDowell K. Absolutely flat semigroups. Pacific J. Math., 107(1983), 319~333

[37] Bulman-Fleming S, McDowell K. Flatness and amalgamation in semigroups. Semigroup Forum, 29(1984), 337~342

[38] Bulman-Fleming S, McDowell K. Left absolutely flat generalized inverse semigroups. Proc.Amer.Math.Soc., 94(1985),553~561

[39] Bulman-Fleming S, McDowell K. Representation extension properties of normal bands. Semigroup Forum, 31(1985), 257~264

[40] Bulman-Fleming S, McDowell K. On left absolutely flat bands. Proc. Amer. Math. Soc., 101(1987),613~618

[41] Bulman-Fleming S, McDowell K. On V.Fleischer's characterization of absolutely flat monoids. Algebra Universalis, 25(1988), 394~399

[42] Bulman-Fleming S, McDowell K. Coperfect monoids, Lattices, Semigroups, and Universal Algebra. Plenum Press, New York, 1990, 29~37

[43] Bulman-Fleming S, McDowell K. Monoids over which all weakly flat acts are flat. Proc. Edinburgh Math. Soc., 33(1990), 287~298

[44] Bulman-Fleming S, McDowell K. A characterization of left cancellative monoids by flatness properties. Semigroup Forum, 40(1990),109~102

[45] Bulman-Fleming S, McDowell K, Renshaw J. Some observations on left absolutely flat monoids. Semigroup Forum, 41(1990), 165~171

[46] Bulman-Fleming S, Normak P. Monoids over which all flat cyclic right acts are strong flat. Semigroup Forum, 50 (1995), 233~241

[47] Bulman-Fleming S, Normak P. Flatness properties of monocyclic acts. Mh. Math., 122(1996), 307~323

[48] Burgess W D. The injective hull of S-sets,S a semilattice of groups. Semigroup Forum, 23(1981), 241~246

[49] Camillo V, Xiao Y F. Weakly regular rings. Comm. Algebra, 22 (10) (1994), 4095~4112

[50] Chen Yuqun. Projective S-acts and exact functors. Algebra Colloquium, 7(2000), 113~120

[51] Chen Yuqun, Fan Yun , Hao Zhifeng. Morita equivalence of semigroup rings. SEA. Bull. Math., 26(2003), 747~750

[52] Chen Yuqun, Fan Yun , Hao Zhifeng. Ideals in Morita rings and Morita semigroups. Acta Mathematica Sinica, English Series, 21(2005), 893~898

[53] Chen Yuqun , Shum K P. Projective and indecomposable S-acts. Science in China, 42(1999), 593~599

[54] Chen Yuqun, Shum K P. Morita equivalence for factorisable semigroups. Acta Mathematica Sinica, English Series, 17(2001), 437~454

[55] Clifford A H, Preston G B. The Algebraic Theory of Semigroups Vol. 1 and Vol. 2. Amer. Math. Soc., Surveys (no. 7), 1961/67

[56] Dauns J. Prime modules. J. Reine Agnew. Math., 298 (1978), 156~181

[57] Dauns J, Hofmann K H. The representation of biregular rings by sheafs. Math. Z., 91 (1966), 103~123

[58] Dauns J, Hoffmann K H. Representations of rings by sections. AMS Memoirs, 83 (1968)

[59] Dorofeeva M P. Hereditary and semihereditary monoids. Semigroup Forum, 4 (1972), 301~311

[60] Dorofeeva M P. Injective and flat M-sets over hereditary monoids. Vestnik Moskovsk.Gos.Univ., 1973, 47~51

[61] Ebrahimi M M. Algebra in a Grothendick topos: injectivity in quasi-equational classes. J. Pure and Appl. Algebra, 26(1982), 269~280

[62] Ebrahimi M M. On ideal closure operators of M-sets. Southeast Asian Bull. of Math., 30(2006), 439~444

[63] Ebrahimi M M, Mahmoudi M. Baer criterion for injectivity of projection algebras. Semigroup Forum, 71(2005), 332~335

[64] Ebrahimi M M, Mahmoudi M, Gh. Moghaddasi Angizan. Injective hulls of acts over left zero semigroups. Semigroup Forum, to appear

[65] Ebrahimi M M, Mahmoudi M, Gh. Moghaddasi Angizan. On the Baer criterion for acts over semigroups. Comm. Algebra, to appear

[66] Eilenberg S.Automata, Languages, and Machines,Vol. B.Academic Press, New York, 1976

[67] Faith C. Lectures on injective modules and quotient rings, Lect. Notes (no. 49). Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1967

[68] Fakhruddin S M. Absolute flatness and amalgams in pomo-noids. Semigroup Forum, 33(1986), 15~22

[69] Fakhruddin S M. On the category of S-posets. Acta Sci. Math. (Szeged)., 52(1988), 85~92

[70] Feller E H. On a class of right hereditary semigroups. Canad. Math. Bull., 17 (1975), 667~670

[71] Feller E H, Gantos R L. Indecomposable and injective S-system with zero. Math. Nachr.,41 (1969), 37~39

[72] Feller E H, Gantos R L. Completely injective semigroups. Pac. J. Math., 31 (1969), 359~366

[73] Feller E H, Gantos R L. Completely injective semigroups with central idempotents. Glasgow Math.J., 10(1969), 16~20

[74] Feller E H, Gantos R L. Completely right injective semigroups that are union of groups. Glasgow Math.J., 12 (1971), 43~49

[75] Fleischer V. Flat relative to diagram acts. In Summaries of the conference "Theoretical and Applied Problems of Mathematics", Tartu, 1980, 17~19

[76] Fleischer V. Completely flat monoids. Tartu Ul. Toimetised, 610(1982), 38~52

[77] Fleischer V. On the wreath products of monoids with categories.ENSV TA Toimetised, 35(1986), 237~243

[78] Fleischer V, Knauer U. Wreath products of monoids with small categories whose principal one sided ideals form trees. J. Algebra

[79] Fleischer V, Knauer U. Endomorphism monoids of acts are wreath products of monoids with small categories. Lecture Notes in Math., 1320(1988), 84~96

[80] Fleischer V, Knauer U. Wreath products of monoids with small categories whose one sided ideals form chains. Southeast Asian Bull.Math., 18(1994), 63~72

[81] Fountain J B. Completely right injective semigroups. Proc. London Math. Soc., 28 (3), (1974), 28~44

[82] Fountain J B. Perfect semigroups. Proc. Edinburgh Math. Soc., 20(1976), 87~93

[83] Fountain J B. Right PP monoids with central idempotents. Semigroup Forum, 13(1977), 229~237

[84] Fountain J B. A class of right PP monoids.Quart.J.Math.Oxford,28(1977), 285~300

[85] Fountain J B. Abundant semigroups.Proc.London Math. Soc.,44(1982), 103~129

[86] Grillet P A. Irreducible actions. Periodica Mathematica Hungarica, 54(2007), 51~76

[87] Gecseg F, Peak I. Algebraic Theory of Automata. Akade-miai Kiado, Budapest (1972)

[88] Gecseg F, Steinby M. Tree Automata. Akademiai Kiado, Budapest, 1984

[89] Ginsburg S. An Introduction to Mathematical Machine Theory. Addison Wesley Publishing Co. Inc., Reading, Mass., 1962

[90] Golchin A. On flatness of acts. Semigroup Forum,67(2003), 262~270

[91] Golchin A. Homoflatness on ideal extensions. Semigroup Forum, 70(2005), 296~301

[92] Golchin A, Renshaw J. Periodic monoids over which all flat cyclic right acts satisfy condition (P). Semigroup Forum, 54(1997), 261~263

[93] Goseki Z. On P-semisimple S-sets. Semigroup Forum, 47(1993), 15~28

[94] Goseki Z. On ρ-irreducible S-subsets of an S-set. Semigroup Forum, 47(1993), 215~222

[95] Goseki Z, Weinert H J. On P-injective hulls of S-sets. Semigroup Forum, 31(1985), 281~295

[96] Gould V. The characterization of monoids by properties of their S-systems. Semigroup Forum, 32(1985), 251~265

[97] Gould V. Completely right pure monoids. Proc. R. Ir. Acad., 87A(1987), 73~82

[98] Gould V. Divisible S-systems and R-modules. Proc. Edinburgh Math.Soc.,30(1987), 187~200

[99] Gould V. Coperfect monoids. Glasgow Math.J., 29(1987), 73~88

[100] Gould V. Model companions of S-systems.Quart. J.Math.Oxford,38(1987), 189~211

[101] Gould V. Axiomatisability problems for S-systems. J.London Math.Soc., 35(1987), 193~201

[102] Gould V. Completely right pure monoids on which $\mathcal{H}$ is a right congruence. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 107(1990), 275~285

[103] Gould V. Completely right pure monoids: the General case. Mathematika, 38(1991), 77~88

[104] Gould V. Coherent monoids. J. Austral.Math.Soc.(Series A), 53(1992), 166~182

[105] Grassmann H. On factor S-sets of monoids modulo submonoids. Semigroup Forum, 18(1979), 163~172

[106] Guo Yuqi. Structure of the weakly left C-semigroups.Chinese Science Bull., 41(1996), 462~467

[107] Guo Yuqi, Shum K P, Zhu Pinyu. Construction of left C-rpp semigroups. Kexue Tongbao, 37(1992), 292~294

[108] Guo Yuqi, Shum K P, Zhu Pinyu. The structure of left C-rpp semigroups. Semigroup Forum,50(1995), 9~23

[109] Hách T L. Characterizations of monoids by regular acts. Periodica Math. Hungarica, 16 (1985), 273~279

[110] Hall T E. On orthodox semigroups and uniform and antiuniform bands. J.Algebra, 16(1970), 204~217

[111] Hall T E. Orthodox semigroups. Pacific J.Math., 39(1971), 677~686

[112] Hall T E. On regular semigroups. J. Algebra, 24(1973), 1~24

[113] Hall T E. Representation extension and amalgamation for semigroups. Quart.J.Math.Oxford, 29 (1978),309~334

[114] Hinkle C V. The extended centralizer of an S-set. Pacific J. Math., 53(1974), 163~170

[115] Howie J M. An Introduction to Semigroup Theory. Academic Press, London, 1976

[116] Howie J M. Fundamentals of Semigroup Theory. Clarendon Press, Oxford, 1995

[117] Isbell J. Perfect monoids. Semigroup Forum, 2(1971), 95~118

[118] Isbell J. Beatific semigroups. J.Algebra, 23(1972), 228~238

[119] Johnson C S, McMorris F R. Injective hulls of certain S-systems over a semilattice.Proc.Amer.Math. Soc.,32(1972), 371~375

[120] Keimel K. The representations of lattice ordered groups and rings by sections in sheafs. Lect. Notes in Math., 248, pp. 2~96, Springer Verlag, 1971

[121] Kilp M. On flat polygons. Uch.Zap.Tartu Un-ta, 253(1970), 66~72

[122] Kilp M. On homological classification of monoids. Siberian Math.J., 13(1972), 396~401

[123] Kilp M. Commutative monoids all of whose ideals are projective. Semigroup Forum, 6 (1973), 334~339

[124] Kilp M. On the homological classification of monoids by properties of their left ideals. Acta et commentationes Universitatis Tartuensis, 336(1974), 178~188

[125] Kilp M. Left completely flat monoids that are unions of groups. Tartu Riikl.Ul.Toimetised, 556(1981), 33~37

[126] Kilp M. Characterization of monoids by properties of their left Rees factors.Uch.Zap.Tartu Un-ta, 640(1983), 29~37

[127] Kilp M. On completely flat monoids.Tartu Riikl. Ul.Toimetised,700(1985), 32~37

[128] Kilp M. Strong flatness of flat cyclic left acts.Uch.Zap.Tartu Un-ta,700(1985), 38~41

[129] Kilp M. Wreath products of acts over monoids, IVprincipally weakly flat acts. Tartu Riikl.Ul.Toimetised, 878(1990), 59~66

[130] Kilp M. On monoids over which all strongly flat cyclic right acts are projective. Semigroup Forum, 52(1996),241~245

[131] Kilp M. Perfect monoids revisited. Semigroup Forum, 53 (1996), 225~229

[132] Kilp M, Knauer U. On free, projective and strongly flat acts. Arch.Math., 47(1986), 17~23

[133] Kilp M, Knauer U. Characterization of monoids by properties of regular acts. J. Pure Appl. Algebra, 46(1987), 217~231

[134] Kilp M, Knauer U. Characterization of monoids by properties of faithful and strongly faithful acts. Tartu Riikl. Ul. Toimetised, 764(1987),39~48

[135] Kilp M, Knauer U. Characterization of monoids by properties of generators. Comm. Algebra, 20(1992), 1841~1856

[136] Kilp M, Knauer U. On torsionless and dense acts. Semigroup Forum, 63(2001), 396~414

[137] Kilp M, Knauer U. On weakly projective amalgams. Comm. Algebra, 33(2005), 1147~1151

[138] Kilp M, Knauer U, Mikhalev A V. Wreath products of a cts over monoids, II torsion free and divisible acts. J.Pure Appl Algebra, 58(1989), 19~27

[139] Kilp M, Knauer U, Mikhalev A V. Monoids, acts, and categories: with applications to wreath products and graphs. Walter de Gruyter, Berlin New York, 2000

[140] Kilp M, Kubjas A. Wreath products of acts over monoids, III principally weakly injective acts. Tartu Riikl. Ul. Toimetised,764(1987), 49~52

[141] Kilp M, Laan V. On flatness properties of cyclic acts. Comm. Algebra, 28(2000), 2919~2926

[142] Kim J P, Park Y S. Injective hulls of S-systems over a Clifford semigroup. Semigroup Forum, 43(1991), 19~24

[143] Knauer U. Projectivity of acts and Morita equivalence of monoids. Semigroup Forum, 3(1972), 359~370

[144] Knauer U. Column monomic matrix monoids.Math.Nachr.,74(1976), 135~141

[145] Knauer U. Characterization of monoids by properties of finitely generated right acts and their right ideals. Lecture Notes in Math., 998(1983), 310~332

[146] Knauer U. Unretractive and S-unretractive joins and lexicographic products of graphs. J.Graph Theory, 11(1987), 429~440

[147] Knauer U. Non additive Morita theory, a survey, Algebra, Proceedings of the Kurosh Conference. Moskva 1998, W. de Gruyter, Berlin, (2000), 167~180

[148] Knauer U. Divisible, torsion-free and act regular generalized act wreath products. J. Algebra, 241(2001), 592~610

[149] Knauer U, Mikhalev A V. Endomorphism monoids of acts over monoids. Semigroup Forum, 6(1973), 50~58

[150] Knauer U, Mikhalev A V, Endomorphism monoids of free a cts and 0-wreath products of monoids. I Annihilator properties, Semigroup Forum, 19(1980), 177~187

[151] Knauer U, Mikhalev A V, Endomorphism monoids of free a cts and 0-wreath products of monoids, II Regularity. Semigroup Forum, 19(1980), 189~198

[152] Knauer U, Mikhalev A V, Endomorphism monoids of free a cts and 0-wreath products of monoids, III Standard involution and continuous endomorphisms. Semigroup Forum, 19(1980), 355~369

[153] Knauer U, Mikhalev A V. Wreath products of ordered semigroups,I General properties, idempotent and regular cartesian isotone wreath products. Semigroup Forum, 27(1983), 331~350

[154] Knauer U, Mikhalev A V. Wreath products of ordered semigroups,II Inverse ordered wreath products. Semigroup Forum, 31(1985), 181~191

[155] Knauer U, Mikhalev A V. Center and commutativity for wreath products of ordered semigroups.Arch.Math.,44(1985),397~402

[156] Knauer U, Mikhalev A V. Wreath products of acts over monoids I: regular and inverse acts. J. Pure Appl. Algebra, 51(1988), 251~260

[157] Knauer U, Mikhalev A V. Endomorphism monoids of generators in the category of S-acts. Proc. of the conference on Semigroups with Applications, Oberwolfach, 1991, World Scientific, Singapore

[158] Knauer U, Nieporte M. Endomorphisms of graphs, I The monoids of strong endomorphisms.Arch.Math.,52(1989), 607~614

[159] Knauer U, Normak P. Morita duality for monoids. Semigroup Forum, 40(1990), 39~57

[160] Knauer U, Normak P. Hereditary endomorphism monoids of projective acts. Manuscripta Math., 70(1991), 133~143

[161] Knauer U, Oltmanns H. Weak projectivities for S-acts. Proceedings of the Conference on General Algebra and Discrete Math. (Potsdam), Aachen, (1999), 143~159

[162] Knauer U, Oltmanns H. On Rees weakly projective right acts. Fundamental and applied Mathematics, 10(2004), 85~96 (in Russian)

[163] Knauer U, Petrich M. Characterization of monoids by torsion free, flat, projective and free acts.Arch.Math.,36(1981), 289~294

[164] Ju Koselev. Wreath product and equations in semigroups. Semigroup Forum, 11(1975), 1~13

[165] Laan V. On a generalization of strong flatness. Acta Comment. Univ. Tartu. Math., 2(1998), 55~60

[166] Laan V. Pullbacks and flatness properties of acts. Ph.D. Thesis, Tartu University Press, 1999

[167] Laan V. On classification of monoids by properties of cofree acts. Semigroup Forum, 59(1999), 79~92

[168] Laan V. Pullbacks and flatness properties of acts I. Comm. Algebra, 29(2001), 829~850

[169] Laan V. Wreath product of set-valued functors and tensor multiplication. Semigroup Forum, 70 (2005), 188~207

[170] Lam T Y. A First Course in Noncommutative Rings. GTM, Vol. 131, Springer-Verlag, 1991

[171] Liu Zhongkui. A characterization of regular monoids by flatness of left acts. Semigroup Forum, 46(1993), 85~89

[172] Liu Zhongkui. Characterization of monoids by condition (P) of cyclic left acts. Semigroup Forum, 49(1994), 31~39

[173] Liu Zhongkui. Monoids over which all regular left acts are flat. Semigroup Forum, 50(1995), 135~139

[174] Liu Zhongkui. On left perfect monoids. Acta Mathematica Sinica. 38(1995), 817~823

[175] Liu Zhongkui. Strongly faithful right S-acts. J. of Mathematics, 15(1995), 429~435

[176] Liu Zhongkui. Monoids over which all flat left acts are regular. J. Pure Appl. Algebra, 111(1996), 199~203

[177] Liu Zhongkui. Characterization of inverse and left inverse semigroups by their S^1-acts. Northeastern Math. J., 12(1996), 395~401

[178] Liu Zhongkui. Characterization of monoids by L-inverse left acts. J. Mathematical Research Exposition, 16(1996), 413~420

[179] Liu Zhongkui. On purity of S-acts. J. of Mathematics, 16 (1996), 151~156

[180] Liu Zhongkui. PSF monoids over which all cyclic flat right acts satisfy condition (P). J. of Mathematics, 19(1999) 339~344

[181] Liu Zhongkui, Ahsan J. Completely right FSF-injective monoids, "Semigroups". Proc. Int. Conf. in Semigroups and its Related Topics, Kunming, Springer, (1995), 188~199

[182] Liu Zhongkui, Ahsan J. A generalization of regular left S-acts. Northeastern Math. J., 13(1997), 169~176

[183] Liu Zhongkui, Li Fang. Completely α-absolutely pure monoids. J. of Mathematics, 18(1998), 191~195

[184] Liu Zhongkui, Ma Qinsheng. Flatness of some cyclic acts. J. Mathematical Research Exposition, 20(2000), 124~128

[185] Liu Zhongkui, Yang Yongbao. Monoids over which every flat right act satisfies condition (P). Comm. Algebra, 22 (1994), 2861~2875

[186] Lopez A M, Luedeman J K. Quasi-injective S-systems and their endomorphism semigroups. Czeachoslovak Math. J., 29 (104), (1979), 97~104

[187] Luedeman J K. Morita equivalent semigroups of quotients. Proc.Amer.Math.Soc., 80(1980), 219~222

[188] Luedeman J K. Torsion theories and semigroups of quotients. Lecture Notes in Math., 998(1983),350~373

[189] Luedeman J K, McMorris F R, Sin Soon-Kiong. Semigroups for which every totally irreducible S-systems is injective. Commentations Math. Univ. Caroline, 19 (1) (1978), 27~35

[190] Mahmoudi M, Gh. Moghaddasi Angizan. Sequentially injective hull of acts over idempotent semigroups. Semigroup Forum, 74(2007), 240~246

[191] Ming R. On (von Neumann) regular rings. Proc. Edinburgh Math. Soc., 19 (1974), 89~91

[192] Mulvey C J. Representation of rings and modules. Lect. Notes in Math., 753, pp. 542~-585, Springer-Verlag,1979

[193] Munn W D. Uniform semilattices and bisimple inverse semigroups. Quart. J. Math. Oxford, 17(1966), 151~159

[194] Normak P. On Noetherian and finitely presented M-sets. Uc.Zap.Tartu Gos.Univ., 431(1977), 37~46

[195] Normak P. Purity in the category of M-sets. Semigroup Forum, 20(1980), 157~170

[196] Normak P. Strong flatness and projectivity of the wreath products of acts. Abelevye gruppy i moduli, Tomsk, 1982, 158~165

[197] Normak P. Analogies of QF rings for monoids II.Uch.Zap.TartuUn-ta,640(1983), 38~47

[198] Normak P. On equalizer flat and pullback flat acts. Semigroup Forum, 36(1987), 293~313

[199] Oltmanns H. Homological classification of monoids by projectivities of right acts. Ph.D. Thesis, 2000

[200] Oltmanns H, Knauer U, Laan V, Kilp M. On (B,B)-projectivity, Categorical Structures and their Applications. World Scientific, New Jersey, (2004), 219~226

[201] Pierce R S, Modules over commutative regular rings. Mem. Amer. Math. Soc., 70 (1967).

[202] Qiao Husheng. Strong Flatness Properties of Right S-acts satisfying Condition (P). Comm. Algebra, 30(2002), 4321~4330

[203] Qiao Husheng. Some conditions on monoids for which condition (P) acts are strongly flat. Comm. Algebra, 32(2004), 4795~4807

[204] Qiao Husheng, Liu Zhongkui. Monoids characterized by condition (E'). Pure Mathematics and Applications, 1~2(2005), 165~171

[205] Qiao Husheng, Wang Limin , Liu Zhongkui. On flatness properties of torsion free right Rees factor acts. Semigroup Forum, 73(2006), 470~474

[206] Qiao Husheng, Wang Limin , Liu Zhongkui. On some new characterizations of right cancellative monoids by flatness properties, The Arabian Journal for Science and Engineering, 32(2007), 75~82

[207] Ramamurthy V S. Weakly regular rings. Canad. Math. Bull.,16 (1973), 317~321

[208] Reilly N R. Bisimple Ω-semigrouops. Proc. Glasgow Math. Assoc., 7 (1966), 160~169

[209] Reilly N R, Scheiblich H E. Congruences on regular semigroups. Paci. J. Math.,23 (1967), 349~360

[210] Renshaw J. Flatness and amalgamation in monoids. J. London Math. Soc., 33(1986), 73~88

[211] Renshaw J. Extension and amalgamation in monoids and semigroups. Proc. London Math. Soc., 52(1986), 119~141

[212] Renshaw J. Perfect amalgamation bases. J. Algebra, 141 (1991), 78~92

[213] Renshaw J. Monoids for which condition (P) acts are projective. Semigroup Forum, 61 (2000), 46~56

[214] Renshaw J. Stability and amalgamation in monoids. Comm. Algebra, 29(2001), 1095~1110

[215] Renshaw J, Golchin A. Flat acts that satisfy condition (P). Semigroup Forum, 59(1999), 295~309

[216] Rosenstein J G. Linear Orderings. Academic Press, 1982

[217] Rotman J J. An Introduction to Homological Algebra. Academic Press, 1979

[218] Saito T. Orthodox semiderect products and wreath products of monoids. Semigroup Forum, 38(1989), 347~354

[219] Satyanarayana M S. Quasi and weakly injective S-systems. Math. Nachr., 71 (1976), 183～190

[220] Schein B M. Injective monars over inverse semigroups. Colloq.Math.Soc., Janos Bolyai 20, Algebraic theory of semigroups, Szeged (Hungary), 1976, 519～544

[221] Schein B M, Injective S-acts over inverse semigroups. Notices Amer. Math. Soc., 23(1976), Abstract 76T～A254

[222] Shafarevich I R. Basic Algebraic Geometry. Springer-Verlag, 1977

[223] Shi Xiaoping. Strongly flat and po-flat S-posets. Comm. Algebra, 33(2005), 4515～4531

[224] Shi Xiaoping, Liu Zhongkui, Wang Fanggui, Bulman-Fleming S. Indecomposable, projective and flat S-posets. Comm. Algebra, 33(2005), 235～251

[225] Shoji K. Self injective non singular semigroups. Proc of 3rd Symposium on semigroups, 1979, 69～78

[226] Shoji K. Completely right injective semigrouops. Math. Japon.,24 (1979), 609～615

[227] Shoji K. Injective hulls of certain right reductive semigroups as right S-systems. Mem. Fac. Sci. Shimane Univ.,14(1980), 25～34

[228] Shoji K. Right self injective semigroups are absolutely closed. Mem.Fac.Sci.Shimane Univ., 14(1980), 35～39

[229] Shoji K. On right self injective regular semigroups. Semigroup Forum, 25(1982), 51～71

[230] Shoji K. On right self injective regular semigroups,II. J.Austral.Math.Soc.,(Series A), 34(1983), 182～198

[231] Shoji K. On self injective semigroups satisfying the minimal conditions. Semigroup Forum, 28(1984), 47～60

[232] Shoji K. Completions and injective hulls of E-reflexive inverse semigroups. Semigroup Forum, 36(1987), 55～68

[233] Shoji K. Absolute flatness of the full transformation semigroups. J. Algebra, 118(1988), 477～486

[234] Shoji K. Amalgamation bases for semigroups. Math. Japonica,35(1990), 473～483

[235] Shoji K. On right self injective, right non singular semigroups. Mem.Fac.Sci.Shimane Univ., 26(1992), 43～53

[236] Shoji K. On multiplicative semigroups of von Neumann regular rings. Proc. Japan. Acad., 69(1993), 209～210

[237] Shoji K. Absolute flatness of regular semigroups with a finite height function. Semigroup Forum, 52(1996), 133～140

[238] Skornjakov L A. On the homological classification of monoids. Sib. Math. J., 10 (1969), 1139～1143

[239] Skornjakov L A. Axiomatizability of the class of injective M-sets. Trudy Seminara im. I.G. Petrovsk, 4 (1978), 233～239 (in Russian)

[240] Skornjakov L A. Regularity of the wreath products of monoids. Semigroup Forum, 18(1979), 83～86

[241] Stenstr öm B, Flatness and localization over monoids. Math. Nachr., 48(1970), 315～334

[242] Talwar S. Morita equivalence for semigroups. J. Austral. Soc. (Series A), 59(1995), 81～111

[243] Talwar S. Strong Morita equivalence and a generalisation of the Rees theorem. J. Algebra, 181(1996), 371~394

[244] Teleman S. Theory of harmonic algebras with applications to von Neumann algebras and cohomology of locally compact spaces. Lect. Notes in Math., 248, pp. 100~311, Springer-Verlag, 1971

[245] Tran Lam Hach. Characterization of monoids by regular acts. Period. Sci. Math. Hung., 16(1985), 273~279

[246] Wang Ning , Liu Zhongkui. Monoids over which all strongly flat left acts are regular. Comm. Algebra, 26(1996), 1863~1866

[247] Wei Jiaqun. On a question of Kilp and Knauer. Comm. Algebra, 32(2004), 2269~2272

[248] Weinert H J. S-acts and semigroups of quotients. Semigroup Forum, 19 (1980), 1~78

[249] Xie Xiangyun, Shi Xiaoping. Order-congruences on S-posets. Commun. Korean Math. Soc., 20(2005), 1~14

[250] Zelmanowitz J. Regular modules. Trans. Amer. Math. Soc., 163 (1972), 341~355

[251] Zhang Renzhi, Gao Wenming,Xu F Y. Torsion theories and quasi filters of right congruences. Algebra Colloq., 1(1994),273~280

[252] Zhu Shenglin. On rings over which every flat left module is finitely projective. J. Algebra, 139(1991), 311~321

[253] Zhang Xia, Laan V. On homological classification of pomonoids by regular weak injectivity properties of S-posets. Cent. Eur. J. Math., 5(1)(2007), 181~200

[254] Yamura. Indecomposable completely simple semigroups except groups.Osaka Math. J.,8(1956),35~42

索 引

符号

《现代数学基础丛书》已出版书目

(按出版时间排序)

1 数理逻辑基础(上册)1981.1 胡世华、陆钟万 著
2 紧黎曼曲面引论 1981.3 伍鸿熙、吕以辇、陈志华 著
3 组合论(上册) 1981.10 柯召、魏万迪 著
4 数理统计引论 1981.11 陈希孺 著
5 多元统计分析引论 1982.6 张尧庭、方开泰 著
6 概率论基础 1982.8 严士健、王隽骧、刘秀芳 著
7 数理逻辑基础(下册) 1982.8 胡世华、陆钟万 著
8 有限群构造(上册) 1982.11 张远达 著
9 有限群构造(下册) 1982. 张远达 著
10 环与代数 1983.3 刘绍学 著
11 测度论基础 1983.9 朱成熹 著
12 分析概率论 1984.4 胡迪鹤 著
13 巴拿赫空间引论 1984.8 定光桂 著
14 微分方程定性理论 1985.5 张芷芬、丁同仁、黄文灶、董镇喜 著
15 傅里叶积分算子理论及其应用 1985.9 仇庆久、陈恕行 编
16 辛几何引论 1986.3 J.柯歇尔、邹异明 著
17 概率论基础和随机过程 1986.6 王寿仁 著
18 算子代数 1986.6 李炳仁 著
19 线性偏微分算子引论(上册) 1986.8 齐民友 著
20 实用微分几何引论 1986.11 苏步青、华宣积、忻云龙 著
21 微分动力系统原理 1987.2 张筑生 著
22 线性代数群表示导论(上册) 1987.2 曹锡华、王建磐 著
23 模型论基础 1987.8 王世强 著
24 递归论 1987.11 莫绍揆 著
25 有限群导引(上册) 1987.12 徐明曜 著
26 组合论(下册) 1987.12 柯召、魏万迪 著
27 拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用 1988.1 李忠 著
28 代数体函数与常微分方程 1988.2 何育赞 著
29 同调代数 1988.2 周伯 著
30 近代调和分析方法及其应用 1988.6 韩永生 著
31 带有时滞的动力系统的稳定性 1989.10 秦元勋、刘永清、王联 编著

32 代数拓扑与示性类 1989.11 马德森著、 吴英青、 段海鲍 译
33 非线性发展方程 1989.12 李大潜、 陈韵梅 著
34 反应扩散方程引论 1990.2 叶其孝、 李正元 著
35 仿微分算子引论 1990.2 陈恕行、 仇庆久、 李成章 编
36 公理集合论导引 1991.1 张锦文 著
37 解析数论基础 1991.2 潘承洞、 潘承彪 著
38 拓扑群引论 1991.3 黎景辉、 冯绪宁 著
39 二阶椭圆型方程与椭圆型方程组 1991.4 陈亚浙、 吴兰成 著
40 黎曼曲面 1991.4 吕以辇、 张学莲 著
41 线性偏微分算子引论(下册)1992.1 齐民友 著
42 复变函数逼近论 1992.3 沈燮昌 著
43 Banach 代数 1992.11 李炳仁 著
44 随机点过程及其应用 1992.12 邓永录、 梁之舜 著
45 丢番图逼近引论 1993.4 朱尧辰、 王连祥 著
46 线性微分方程的非线性扰动 1994.2 徐登洲、 马如云 著
47 广义哈密顿系统理论及其应用 1994.12 李继彬、 赵晓华、 刘正荣 著
48 线性整数规划的数学基础 1995.2 马仲蕃 著
49 单复变函数论中的几个论题 1995.8 庄圻泰 著
50 复解析动力系统 1995.10 吕以辇 著
51 组合矩阵论 1996.3 柳柏濂 著
52 Banach 空间中的非线性逼近理论 1997.5 徐士英、 李冲、 杨文善 著
53 有限典型群子空间轨道生成的格 1997.6 万哲先、 霍元极 著
54 实分析导论 1998.2 丁传松、 李秉彝、 布伦 著
55 对称性分岔理论基础 1998.3 唐云 著
56 Gel'fond-Baker 方法在丢番图方程中的应用 1998.10 乐茂华 著
57 半群的 S-系理论 1999.2 刘仲奎 著
58 有限群导引(下册) 1999.5 徐明曜 著
59 随机模型的密度演化方法 1999.6 史定华 著
60 非线性偏微分复方程 1999.6 闻国椿 著
61 复合算子理论 1999.8 徐宪民 著
62 离散鞅及其应用 1999.9 史及民 编著
63 调和分析及其在偏微分方程中的应用 1999.10 苗长兴 著
64 惯性流形与近似惯性流形 2000.1 戴正德、 郭柏灵 著
65 数学规划导论 2000.6 徐增堃 著
66 拓扑空间中的反例 2000.6 汪林、 杨富春 编著
67 拓扑空间论 2000.7 高国士 著
68 非经典数理逻辑与近似推理 2000.9 王国俊 著
69 序半群引论 2001.1 谢祥云 著
70 动力系统的定性与分支理论 2001.2 罗定军、 张祥、 董梅芳 编著
71 随机分析学基础(第二版) 2001.3 黄志远 著

72 非线性动力系统分析引论 2001.9 盛昭瀚、马军海 著
73 高斯过程的样本轨道性质 2001.11 林正炎、陆传荣、张立新 著
74 数组合地图论 2001.11 刘彦佩 著
75 光滑映射的奇点理论 2002.1 李养成 著
76 动力系统的周期解与分支理论 2002.4 韩茂安 著
77 神经动力学模型方法和应用 2002.4 阮炯、顾凡及、蔡志杰 编著
78 同调论-代数拓扑之一 2002.7 沈信耀 著
79 金兹堡-朗道方程 2002.8 郭柏灵、黄海洋、蒋幕容 著
80 排队论基础 2002.10 孙荣恒、李建平 著
81 算子代数上线性映射引论 2002.12 侯晋川、崔建莲 著
82 微分方法中的变分方法 2003.2 陆文端 著
83 周期小波及其应用 2003.3 彭思龙、李登峰、谌秋辉 著
84 集值分析 2003.8 李雷、吴从 著
85 数理逻辑引论与归结原理 2003.8 王国俊 著
86 强偏差定理与分析方法 2003.8 刘文 著
87 椭圆与抛物型方程引论 2003.9 伍卓群、尹景学 著
88 有限典型群子空间轨道生成的格(第二版) 2003.10 万哲先、霍元极 著
89 调和分析及其在偏微分方程中的应用(第二版) 2004.3 苗长兴 著
90 稳定性和单纯性理论 2004.6 史念东 著
91 发展方程数值计算方法 2004.6 黄明游 著
92 传染病动力学的数学建模与研究 2004.8 马知恩、周义仓、王稳地、靳祯 著
93 模李超代数 2004.9 张永正、刘文德 著
94 巴拿赫空间中算子广义逆理论及其应用 2005.1 王玉文 著
95 巴拿赫空间结构和算子理想 2005.3 钟怀杰 著
96 脉冲微分系统引论 2005.3 傅希林、闫宝强、刘衍胜 著
97 代数学中的 Frobenius 结构 2005.7 汪明义 著
98 生存数据统计分析 2005.12 王启华 著
99 数理逻辑引论与归结原理(第二版) 2006.3 王国俊 著
100 数据包络分析 2006.3 魏权龄 著
101 代数群引论 2006.9 黎景辉、陈志杰、赵春来 著
102 矩阵结合方案 2006.9 王仰贤、霍元极、麻常利 著
103 椭圆曲线公钥密码导引 2006.10 祝跃飞、张亚娟 著
104 椭圆与超椭圆曲线公钥密码的理论与实现 2006.12 王学理、裴定一 著
105 散乱数据拟合的模型、方法和理论 2007.1 吴宗敏 著
106 非线性演化方程的稳定性与分歧 2007.3 马天 汪守宏 著
107 正规族理论及其应用 2007.4 顾永兴 庞学城 方明亮 著
108 组合网络理论 2007.5 徐俊明 著
109 矩阵的半张量积:理论与应用 2007.5 程代展 齐洪胜 著
110 鞅与 Banach 空间几何学 2007.5 刘培德 著
111 非线性常微分方程边值问题 2007.6 葛渭高 著

112 戴维-斯特瓦尔松方程 2007.5 戴正德 蒋慕蓉 李栋龙 著
113 广义哈密顿系统理论及其应用 2007.7 李继彬 赵晓华 刘正荣 著
114 Adams 谱序列和球面稳定同伦群 2007.7 林金坤 著
115 矩阵理论及其应用 2007.8 陈公宁 著
116 集值随机过程引论 2007.8 张文修 李寿梅 汪振鹏 高勇 等
117 偏微分方程的调和分析方法 2008.1 苗长兴 张波 著
118 拓扑动力系统概论 2008.3 叶向东 黄文 邵松 著
119 线性微分方程的非线性扰动(第二版) 2008.3 徐登洲 马如云 著
120 数组合地图论(第二版) 2008.3 刘彦佩 著
121 半群的 S-系理论(第二版) 2008.3 刘仲奎 乔虎生 著

(O-3029.0101)



销售分类建议：高等数学

定　价：58.00 元